Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Высшая школа
экономики
и менеджмента

С. М. БОРОДАЧЁВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

С. М. Бородачёв

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ

Учебное пособие

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся по направлениям
230700 — Прикладная информатика,
080500 — Бизнес-информатика*

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2016

УДК 519.22 (075.8)
ББК 22.172я73
Б83

Рецензенты:
кафедра «Высшая и прикладная математика» УрГУПС (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. А. Тимофеева*);
канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр. *Д. Г. Ермаков* (Институт математики и механики УрО РАН)

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *О. И. Никонов*

Бородачёв, С. М.

Б83 Статистические методы в управлении качеством : учебное пособие / С. М. Бородачёв.— Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016.— 87, [1] с.
ISBN 978-5-7996-1718-9

Рассматривается применение методов математической статистики на этапах проектирования и производства продукции с целью обеспечения её качества.

Пособие содержит теоретический материал, упражнения, практические задания и задания для самостоятельной работы. Предназначено для студентов управленческих, информационных, экономических и др. направлений всех форм обучения.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 519.22 (075.8)
ББК 22.172я73

ISBN 978-5-7996-1718-9

ВВЕДЕНИЕ

Развитие процессов повышения качества продукции на предприятиях имеет теперь уже длинную историю (более 100 лет) — оно вылилось в принятие стандартов серии ISO 9000. Но вся проблема обеспечения качества теперь рассматривается шире: как всеобъемлющий принцип «От запросов потребителя к удовлетворённости потребителя», или *Total Quality Management* (*TQM*) — всеобщее управление качеством.

Базовые элементы концепции *TQM*:

1. Вовлеченность высшего руководства в процесс повышения качества, начиная с самых ранних этапов создания или модернизации бизнеса;
2. Вовлеченность покупателя: покупатель должен сообщать о своих потребностях производителю, т. е. какой продукт ему необходим;
3. Разработка продукции с учётом требований к качеству;
4. Разработка производственных процессов с учётом требований качества;
5. Контроль производственных процессов для достижения качества: необходимо следить, чтобы разработанные условия процесса соблюдались, и своевременно вносить коррективы — анализ возможностей процесса и наладка;

6. Развитие отношений с поставщиками. Ясно, что на качество конечного изделия влияет качество комплектующих и материалов, получаемых извне. Защита покупателя от некачественных комплектующих — задача производителя готовых изделий. Здесь широко применяется входной выборочный контроль;
7. Послепродажное обслуживание. Это, с одной стороны, необходимое условие для привлекательности продуктов (замена смазки, изнашивающихся элементов), а с другой — источник информации о дефектах, выявленных в процессе эксплуатации. Такая информация должна собираться, обобщаться и доставляться производителю;
8. Тестирование и постоянное улучшение достигнутых результатов: сравнение качества продукции разных производителей, выработка интегральных показателей качества, экспертное оценивание и т. д.

Главное отличие *TQM* от стандартов ISO 9000 — расширение сферы охвата системы качества за пределы предприятия.

При реализации многих задач, перечисленных в этих пунктах, находят применение статистические методы.

1. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОЦЕССА

Пусть ξ — случайное значение контролируемого показателя изделия, произведённого процессом. Способность процесса производить изделие с показателем внутри поля допусков называется *возможностями процесса* (*capability*).

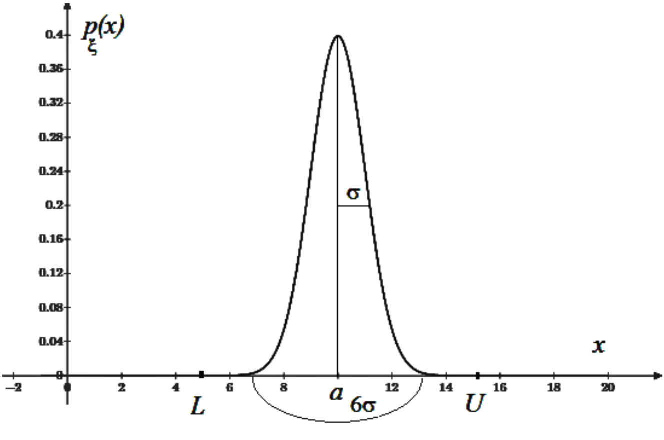
Индекс возможностей процесса:

$$C_p = \frac{U - L}{6\sigma},$$

где U — «*Upper*» — верхняя граница поля допусков;

L — «*Low*» — нижняя граница поля допусков;

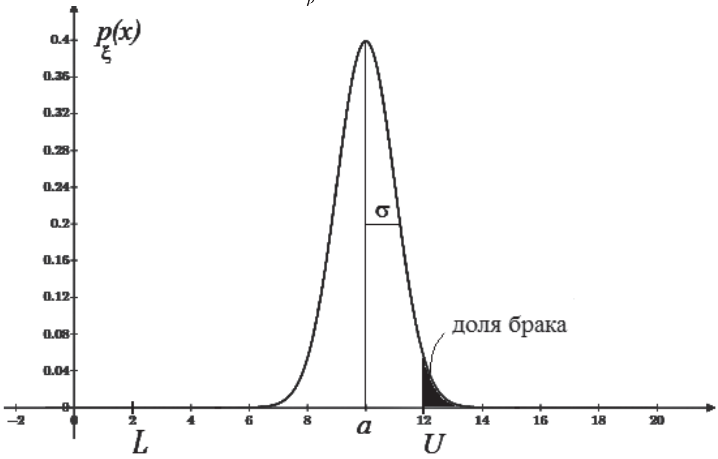
$\sigma = \sqrt{D\xi}$ — стандартное отклонение процесса.



$p_\xi(x)$ — плотность распределения процесса, $a = M\xi$ — математическое ожидание (среднее процесса). 99,7 % результатов нормального процесса лежат внутри ($a - 3\sigma$, $a + 3\sigma$), т. о., 6σ — полная естественная изменчивость процесса.

C_p показывает, сколько раз естественная изменчивость процесса укладывается в поле допусков. Чем C_p выше, тем процесс лучше.

Может быть ситуация: C_p велик, а брака много.



Поэтому если применяют только показатель C_p, то подразумевается, что процесс идеально центрован (настроен), т. е. $a = \dfrac{U + L}{2}$. В этом случае можно связать индекс возможностей процесса с долей брака.

$\dfrac{U - L}{\sigma}$	2	4	6	8	10
C_p	0.33	0.66	1	1.33	1.66
Процент брака = $= p$ (доля брака) · 100 %	31.7	4.55	0.27	0.0064	0.00006

В мировой практике обычное значение индекса возможностей: $C_p = 1.33$.

Так как возможности процесса определяются и отклонением от настроенности, то для него используется мера центрирования CM.

$$CM = \frac{\left|\frac{U+L}{2} - a\right|}{\frac{U-L}{2}}.$$

Мера центрирования показывает, насколько центр процесса уклонился от середины поля допусков в единицах полуширины поля допусков.

Мера, объединяющая и центрирование, и дисперсию,— исправленный индекс возможностей процесса.

$$C_{pk} = \min\left(\frac{U-a}{3\sigma}, \frac{a-L}{3\sigma}\right).$$

Исправленный индекс возможностей процесса (C_{pk}) характеризует точность процесса. Можно показать, что

$$C_{pk} = C_p\,(1 - CM). \tag{1.1}$$

На практике нам обычно неизвестны математическое ожидание a и стандартное отклонение σ процесса. Поэтому значения этих неизвестных величин заменяют их оценками по выборке $x^1, x^2, ..., x^n, ..., x^N$ из процесса. Оценкой $\hat{a}$ математического ожидания является выборочное среднее $\bar{x}$, оценкой дисперсии $D\xi$ является статистика s^2. Оценкой стандартного отклонения σ берут $\hat{\sigma} = s$. Если заменить a и σ их оценками, получим оценённые индексы возможностей. Обычно ими и оперируют.

В программе *STATISTICA* индексы возможностей процесса вычисляются так:

Statistics → *Industrial statistics & six* σ → *Process Analysis* → *Process* (*machine*) *capability* → *variable* ($\{x_n\}$) → *OK*. Задать *U*, *L* → *No grouping* → *OK*. *Process Capability indexes* → *number beyond specification* (процент брака).

1.1. Аттестация процесса

- *По настроенности*

Настроенность — соответствие центра процесса номиналу. Аттестация процесса проводится как проверка гипотезы:

H_0: $a = a_0$,

H_1: $a \neq a_0$, где a — математическое ожидание, a_0 — заданный номинал.

Это обычная проверка гипотезы о математическом ожидании при известной или неизвестной дисперсии на уровне значимости α.

- *По разбросу*

Гипотезы:

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$,

H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$,

где σ^2 — дисперсия процесса, σ_0^2 — нормативная величина дисперсии.

Это обычная проверка гипотезы о дисперсии при известном или неизвестном математическом ожидании на уровне значимости α.

- *По стабильности*

Стабильность технологического процесса — это одинаковость распределения контролируемого параметра в партиях изделий, произведённых в разное время.

а) Стабильность по настроенности.

Проверяется гипотеза:

H_0: $a_1 = a_2$,

H_1: $a_1 \neq a_2$,

a_1– математическое ожидание в начале периода; a_2– математическое ожидание в конце периода.

б) Стабильность по разбросу.

Проверяется гипотеза:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$,

σ_1^2– дисперсия в начале периода; σ_2^2– дисперсия в конце периода.

Так как процент брака считался по нормальному распределению и проверка гипотез при аттестации тоже подразумевает нормальное распределение, то важно предварительно убедиться в нормальности процесса.

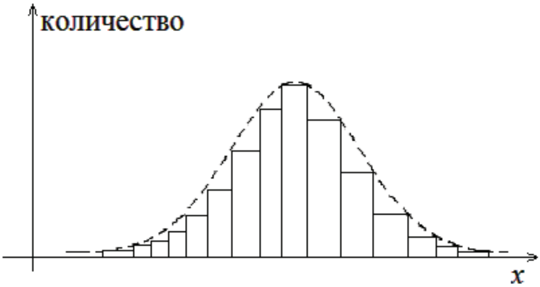
1.2. Проверка нормальности процесса

Пусть по $x^1, x^2, ..., x^n, ..., x^N$ — выборке из ξ (процесса) требуется проверить, нормально ли распределена случайная величина ξ.

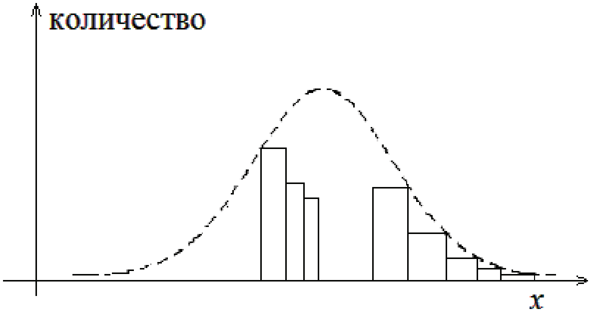
- *Визуальные методы:*

1) гистограмма.

Если гистограмма напоминает гауссовский колокол, то можно говорить о нормальности процесса.



Нормальный процесс.



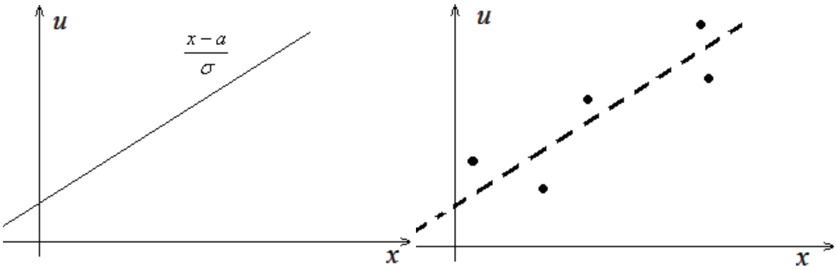
Не нормальный процесс;

2) эмпирическая функция распределения.

Пусть ξ имеет нормальное распределение: $\xi \sim N(a, \sigma)$, тогда функция распределения имеет вид

$$F_\xi(x) = \Phi^N_{a,\sigma}(x) = P\{\xi \le x\} = P\{\frac{\xi - a}{\sigma} \le \frac{x-a}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-a}{\sigma}),$$

где $\Phi(.)$ — функция нормального стандартного распределения. Если применить к значениям функции распределения квантильное преобразование $u_{.} = u(.)$, то $u(\Phi(\frac{x-a}{\sigma})) = \frac{x-a}{\sigma}$ — линейная функция.



И если эмпирическая функция распределения была близка к нормальной, то квантильное преобразование её должно дать точки, лежащие вдоль прямой! Легко увидеть на глаз — так это или нет [4].

В процедурах *STATISTICA* эта проверка называется: *Probability plots, Q-Q Plot*.

- *Тесты нормальности Колмогорова и Шапиро — Уилка:*

Критерий (тест) уровня α — это некоторая процедура вычисления уровня значимости данных sl и сравнения его с α. Если $sl > \alpha$, то принимаем гипотезу H_0, если $sl < \alpha$, то принимаем гипотезу H_1.

Нужно помнить, что в каждом тесте используются своя статистика критерия и соответствующая область значимости. Они по смыслу связаны с некоторым конкретным отклонением от H_0 (характером H_1), то есть разные тесты способны уловить специфические отклонения от H_0. Поэтому, чтобы убедиться в H_0, т. е. что от неё нет никаких отклонений, нужно чтобы все проведённые тесты (в данном случае нормальности) не отвергли её. Чтобы опровергнуть — достаточно опровергнуть одним.

Пример 1.1

Пусть дана выборка $\{x^n\} = 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2$. Определить, является ли процесс нормальным при $\alpha = 0.01$.

Тест Колмогорова [1]. Значение статистики критерия d_N: $d_{10} = 0.328$.

Найдем уровень значимости данных по предельному критерию Колмогорова.

$sl_{\text{пк}} = 1 - K(\sqrt{N}\, d_N) = 1 - K(\sqrt{10}\, 0.328) = 1 - 0.77 = 0.23.$
$K(x)$ — функция предельного распределения Колмогорова.

$sl_{\text{пк}}$ — вероятность (с точки зрения критерия Колмогорова) получить имеющиеся данные в предположении, что распределение является нормальным. Она велика ($> \alpha$), поэтому пока принимаем гипотезу H_0 (распределение может быть нормальным).

Тест Шапиро — Уилка. Для той же выборки значение статистики критерия $w_{sw} = 0.66$, $sl_{sw} = 0.00025 < \alpha$ (очень мал), окончательно принимаем гипотезу H_1 (распределение не является нормальным).

В *STATISTICA* эти критерии:

Statistics → Basic statistic and tables →descriptive statistics → Normality → Shapiro — Wilk's, *Kolmogorov — Smirnov*.

Либо: *Graphs → histograms → advanced → Normal → Shapiro — Wilk's*, *Kolmogorov — Smirnov test*.

1.3. Возможности машины — возможности процесса

В изменчивости процесса принято выделять следующие составляющие:

– машинные возможности (*machine capability*);

– медленные вариации среднего уровня, связанные с изменениями в сырье, переналадке машин и т. п. Соответственно вводят:

C_p — индекс возможностей процесса,
C_{pk} — исправленный индекс возможностей процесса,
C_m — индекс возможностей машины,
C_{mk} — исправленный индекс возможностей машины.

Для выделения этих вкладов и оценки их значимости используют методы дисперсионного анализа [2].

Пример 1.2

Имеем три выборки с одной машины, но в разные интервалы времени (сырье менялось).

Номер наблюдения	Интервалы времени		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
n_i	Значение наблюдения y^{n_i}		
1	4	4	3
2	3	2	3
3	4	2	–
4	4	–	–
5	4	–	–

Здесь n_i — номер наблюдения в i-й выборке. Требуется определить индексы возможностей процесса в целом и машины при спецификации $U = 6$, $L = 2$, $Nominal = 4$.

1) Найдём индекс возможностей процесса в целом:

$\hat{C}_p = \dfrac{U - L}{6\hat{\sigma}_p}$, где $\hat{\sigma}_p$ — оценка стандартного отклонения процесса,

$\hat{\sigma}_p = \hat{\sigma}_{tot} = \sqrt{\dfrac{SS_{tot}}{N-1}} = \sqrt{\dfrac{SS_w + SS_b}{N-1}}$, N — общее число наблюдений.

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{2.63 + 3.46}{10-1}} = \sqrt{0.677} = 0.823,\ C_p = \frac{6-2}{6 \cdot 0.823} = \frac{4}{4.938} = 0.81.$$

2) Найдём исправленный индекс возможностей процесса в целом:

$$C_{pk} = C_p\,(1 - \text{C}M),$$

$$\hat{a} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y^n = \bar{y} = 3.3\,,\ CM = \frac{\left|\frac{6+2}{2} - 3.3\right|}{\frac{6-2}{2}} = \frac{4-3.3}{2} = 0.35\,,\ C_{pk} =$$

$= 0.81\ (1–0.35) = 0.526.$

3) Найдём индекс возможностей машины:

$\hat{C}_m = \dfrac{U-L}{6\hat{\sigma}_m}$, где $\hat{\sigma}_m$ — оценка изменчивости только из-за машины (внутри групп с одинаковым сырьём),

$$\hat{\sigma}_m = \sqrt{\frac{SS_W}{N-I}} = \sqrt{\frac{3.46}{10-3}} = 0.703\,,\ C_m = \frac{6-2}{6 \cdot 0.703} = 0.947\,.$$

4) Найдём исправленный индекс возможностей машины:

CM то же самое, как и для процесса в целом (так как оценку центра машины невозможно выделить — она зависит от сырья): $CM = 0.35$, $C_{mk} = 0.947\ (1 - 0.35) = 0.616$.

Для машины эти показатели всегда лучше, чем для процесса в целом.

В *STATISTICA* данные подготавливают так же, как для дисперсионного анализа. *Statistics* → *Industrial statistics & six* σ → *Process analyses* → *Process capability analyses & Tolerant Intervals*, *raw data* →*OK*→ *Grouping* → *Variable for the analyses* (*var*. 1) *by* (*var*. 2) → *Process specification* (4, 2, 6) → *Estimate sigma from variances* → *OK* → *Normal Distribution* → *Summary current variable*.

C_p в *STATISTICA* обозначен как *PP*, C_{pk} — как *PPK*. На закладке *Capability Indexes*: C_m обозначено как C_p, *CM* как *K*, C_{mk} как C_{pk}.

Иногда при аттестации процесса возникает задача проверки идентичности работы однотипного оборудования. См. источник [2].

Упражнения

Упражнение 1.1

Найти выражение для вероятности (доли) брака нормального децентрованного процесса, проверить таблицу связи C_p с процентом брака.

Упражнение 1.2

Вывести формулу (1.1).

Упражнение 1.3

Производится аттестация по настроенности процесса производства резисторов. Номинал — 10 Ком. Дисперсия процесса неизвестна. После проверки 16 резисторов $\bar{x} = 8.3$ Ком, несмещённая оценка дисперсии — 6.25 Ком^2. Решить вопрос об аттестации на уровне $\alpha = 0.01$.

Упражнение 1.4

Производится проверка стабильности процесса изготовления деталей на токарном станке. В начале периода было отобрано 9 деталей. Выборочная дисперсия контрольного размера оказалась 5.9 мкм^2. В конце периода было отобрано 11 деталей. Выборочная дисперсия контрольного размера оказалась 23.3 мкм^2. Решить вопрос о стабильности процесса на уровне $\alpha = 0.05$ в случаях: 1) альтернативная гипотеза утверждает, что дисперсия стала больше; 2) альтернативная гипотеза утверждает, что дисперсия изменилась.

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ

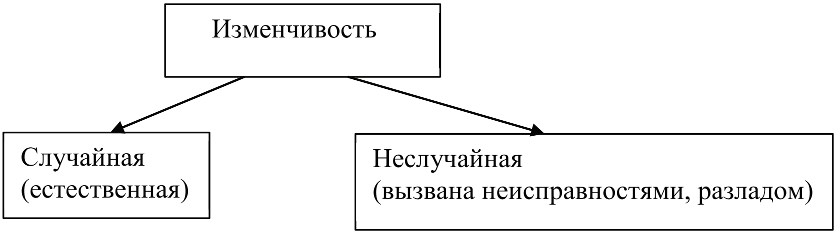
Развитие обеспечения качества на предприятиях идёт в следующем направлении:

Статистическое управление процессом — это статистическое оценивание выхода процесса (готовых изделий, услуг и т. п.) во время производства с целью корректировки процесса.

2.1. Контрольные карты Шухарта

Важность этих карт для управления производственными процессами была впервые показана У. Шухартом в 1924 году (США).

Всякий процесс имеет свою собственную, не устранимую до конца изменчивость, но если процесс разлажен, то к этому добавляется неслучайная (вызванная факторами неисправности) изменчивость.



Контрольная карта — упорядоченный во времени график выборочных статистик, используемый для различения случайной и неслучайной изменчивости процесса.

Контрольные карты $\bar{X} - R$ позволяют оперативно следить за процессом производства, контролируя важный параметр качества (длина, вес и т. д.) и его рассеивание.

Пример 2.1

Поточная линия по розливу напитков. Пока она хорошо настроена, фиксируем показатели её работы. Делаем $I \geqslant 20$ (число выборок) по $N = 2 \div 6$ (число наблюдений в каждой выборке). x^{n_i} — результаты наблюдений ($n_i = 1, \ldots, N$; $I = 1, \ldots, I$).

Среднее значение в каждой i-ой выборке $\bar{x}_i = \frac{1}{N}\sum_{n_i=1}^{N} x^{n_i}$, размах в каждой i-ой выборке $r_N^i = \max\{x^{n_i}\} - \min\{x^{n_i}\}$, среднее средних значений всех выборок $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \bar{x}_i$, средний размах выборок $\bar{r}_N = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} r_N^i$.

$\bar{X}$-карта

Выборочная статистика: $\bar{X}$ — выборочное среднее по N наблюдениям. Считаем, что выборка из нормального распределения: $X^{n_i} \sim N(a, \sigma)$, предположим, с параметрами a и σ стабильного состояния. Т. к. $\bar{X} \sim N(a, \sigma_{\bar{X}}), \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, то фактическое значение $\bar{x}$ должно находиться в диапазоне ($a \pm (2 \div 3)\sigma_{\bar{X}}$) с вероятностью (0.95÷0.997)). Поэтому выход за эти границы почти невероятен при неизменённом распределении процесса, и если произойдёт, то будет означать разладку процесса по среднему. Выборки берутся периодически во времени, и значения $\bar{x}$ откладываются на заготовленной карте.

Практически для построения границ пустой карты берут оценки по I выборкам в заведомо стабильном состоянии: $a \to \hat{a} = \bar{\bar{x}}$, оценку стандартного отклонения процесса находят через размахи [2] $\sigma \to \hat{\sigma} = \frac{\bar{r}_N}{d_N}$, значит, $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\bar{r}_N}{\sqrt{N} d_N}$. Тогда

$UCL = \bar{\bar{x}} + (2 \div 3)\frac{\bar{r}_N}{d_N\sqrt{N}}$ — верхний контрольный уровень,

$LCL = \bar{\bar{x}} - (2 \div 3)\frac{\bar{r}_N}{d_N\sqrt{N}}$ — нижний контрольный уровень.

В частности, для правила «3 сигм»:

$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2(N)\bar{r}_N$,

$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2(N)\bar{r}_N$.

Коэффициенты $A_2(N) = \frac{3}{d_N\sqrt{N}}$ табулированы.

Пример 2.2

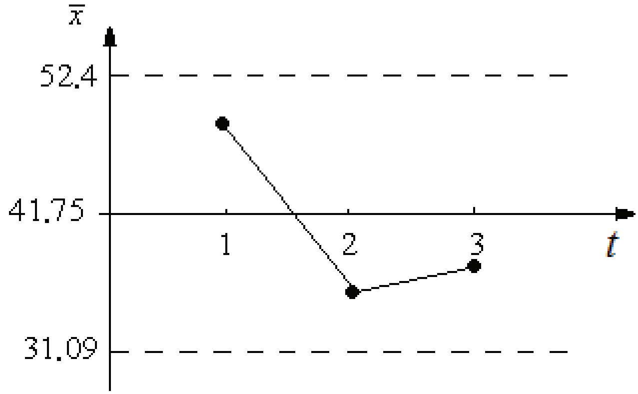
По I = 2 выборкам 40, 38 и 37, 52 в исходном настроенном состоянии построить $\bar{X}$ -карту.

Объем выборок N = 2. Найдем центр $\bar{X}$-карты: $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{2}(39 + 44.5) = 41.75$, размах каждой выборки: $r^1 = 40 - 38 =$ $= 2$, $r^2 = 52 - 37 = 15$. Средний размах по всем выборкам: $\bar{r}_2 = 8.5$. Оценим стандартное отклонение процесса: $\hat{\sigma} = \frac{\bar{r}_2}{d_2} = \frac{8.5}{1.128} =$ 7.535.

Найдём верхний и нижний контрольные уровни по правилу «2 сигма»:

$UCL = 41.75 + 2\frac{8.5}{1.128\sqrt{2}} = 52.4$, $LCL = 31.09$. Строим карту.

Через месяц была взята контрольная выборка: 51, 44. $\bar{x}$ = 47.5, через два месяца: 47, 24. $\bar{x}$ = 35.5, через три месяца: 43, 34. $\bar{x}$ = 38.5. Откладываем эти три точки на карте.



Точки графика не выходят за нижний или верхний контрольный уровень — процесс стабилен по среднему.

R-карта

Позволяет оперативно контролировать рассеивание или дисперсию процесса.

Выборочная статистика: R_N — размах выборки N наблюдений.

В стабильном состоянии фактическое значение r_N должно находиться в диапазоне $MR_N \pm (2 \div 3)\sigma_{R_N}$. Заменим оценками: $MR_N \to \widehat{MR_N} = \overline{r}_N$,

$$\sigma_{R_N} = \sigma\sqrt{D_N} \to \hat{\sigma}_{R_N} = \hat{\sigma}\sqrt{D_N} = \frac{\overline{r}_N}{d_N}\sqrt{D_N}.$$

Тогда

$UCL = \overline{r}_N + (2 \div 3)\dfrac{\overline{r}_N}{d_N}\sqrt{D_N} = \overline{r}_N(1 + (2 \div 3)\dfrac{\sqrt{D_N}}{d_N})$ — верхний контрольный уровень,

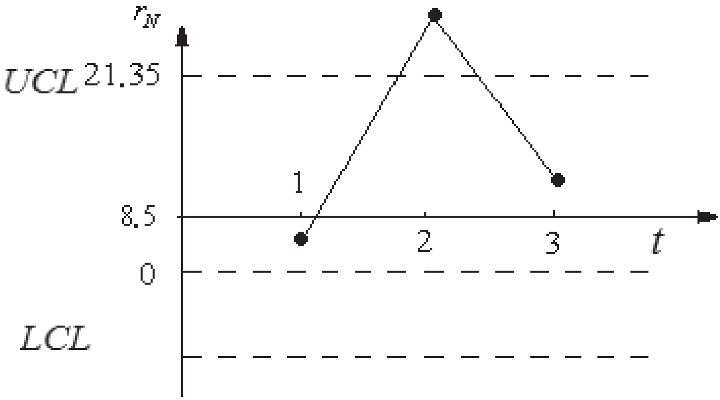
$LCL = \overline{r}_N - (2 \div 3)\dfrac{\overline{r}_N}{d_N}\sqrt{D_N} = \overline{r}_N(1 - (2 \div 3)\dfrac{\sqrt{D_N}}{d_N})$ — нижний контрольный уровень.

Если $LCL < 0$, его берут равным 0.

Для правила «3 сигм» обозначают: $UCL = \overline{r}_N \cdot D_3(N)$, $LCL = \overline{r}_N \cdot D_4(N)$, $D_3(N), D_4(N)$ — табличные значения.

Пример 2.3 (продолжение 2.2)

Строим R-карту. $\overline{r}_N = 8.5$, $UCL = 8.5(1 + 2\dfrac{\sqrt{D_2}}{d_2}) = 21.35$, $LCL = 8.5(1 - 2\dfrac{\sqrt{D_2}}{d_2}) < 0 \to LCL = 0$. По контрольным выборкам наносим точки: $r = 7$, $r = 23$, $r = 9$.



Видно, что во втором месяце процесс вышел из-под контроля по разбросу.

2.2. Контрольные карты по альтернативному признаку

***P*-карта**

P-карта позволяет контролировать долю p несоответствующих изделий партии (процесса). Выборочная статистика — доля несоответствующих изделий в выборке $P_N = \dfrac{\mu_N}{N}$, где μ_N — число несоответствующих изделий в выборке объёма N (уже считаем распределение биномиальным, т. к. объём партии $M >> N$).

$$NP_N = \mu_N \sim Bin(N, p) \xrightarrow[N\to\infty]{} N(Np, \sqrt{Npq}).$$

Np — математическое ожидание, $\sqrt{Npq}$ — стандартное отклонение — наследуемые от биномиального распределения. Тогда $P_N \sim N(p, \sqrt{\dfrac{pq}{N}})$. Как и ранее, получаем:

$$UCL = \hat{p} + (2 \div 3)\hat{\sigma}_{p_N} = \hat{p} + (2 \div 3)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}},$$

$$LCL = \hat{p} - (2 \div 3)\hat{\sigma}_{p_N} = \hat{p} - (2 \div 3)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}},$$ где p заменено оценкой, предварительно найденной в невозмущённом процессе: берётся I выборок ($I \geqslant 20$) объёмом N каждая ($N \geqslant 50$). Объёмы большие, т. к. используется нормальная аппроксимация.

$$p \to \hat{p} = \frac{\textit{общее число дефектных изделий во всех } I \textit{ выборках}}{IN} =$$

$$= \frac{1}{IN}\sum_{i=1}^{I} Np_i = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} p_i,$$ p_i — доля дефектных изделий в i-ой выборке.

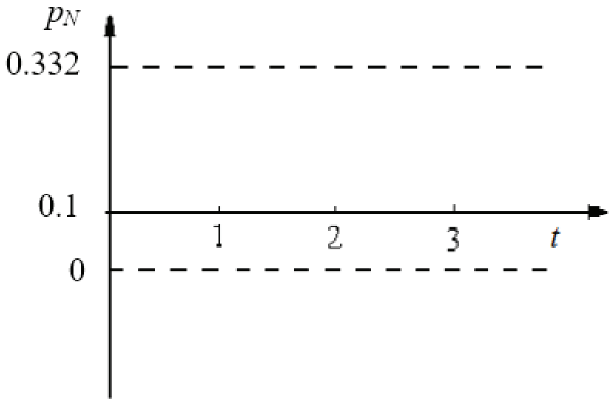
Пример 2.4

Построить P-карту по правилу «3σ», если было снято 10 выборок по 15 наблюдений над невозмущённым процессом. При этом числа несоответствующих изделий оказались (3, 3, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 1).

$$\hat{p} = \frac{3+3+2+0+1+2+0+1+2+1}{15 \cdot 10} = 0.1,$$

$$UCL = 0.1 + 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{15}} = 0.332,$$

$$LCL = 0.1 - 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{15}} = 0.1 - 0.25 < 0 \Rightarrow LCL = 0.$$



Через месяц берём 15 изделий и откладываем долю дефектов и т. д.

Statistics → Industrial statistics → Quality Control Charts → P-Chart for attributes → constant sample size = 15 → Variables → Var1 (3, 3, 2...) → OK → OK.

U-карта

U-карта позволяет контролировать параметр *u* — среднее число несоответствий, приходящихся на одно изделие (мелкие дефекты — число царапин на листе металла, число несветящихся пикселей у экрана т. п.) у процесса.

Выборочная статистика: число несоответствий, приходящихся на одно изделие в выборке:

$$U_N = \frac{U^1 + U^2 + \ldots + U^N}{N} = \frac{\textit{общее число несоответствий во всех изделиях выборки}}{N},$$

число несоответствий в одном изделии $U^n \sim P^o(u)$, $u = MU^n$ – среднее.

$U^1 + U^2 + \ldots + U^N \sim P^o(Nu)$ как пуассоновский поток за время, в N раз большее.

$NU_N \sim P^o(Nu) \xrightarrow[N\to\infty]{} N(Nu, \sqrt{Nu})$ с унаследованным математическим ожиданием и дисперсией.

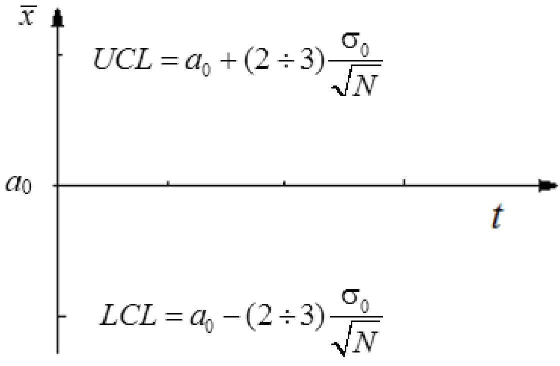
Значит, $U_N \sim N(u, \sqrt{\dfrac{u}{N}})$. Как и ранее, имеем:

$$\begin{Bmatrix} UCL \\ LCL \end{Bmatrix} = \hat{u} \pm (2 \div 3)\sqrt{\frac{\hat{u}}{N}}\text{, где заменено}$$

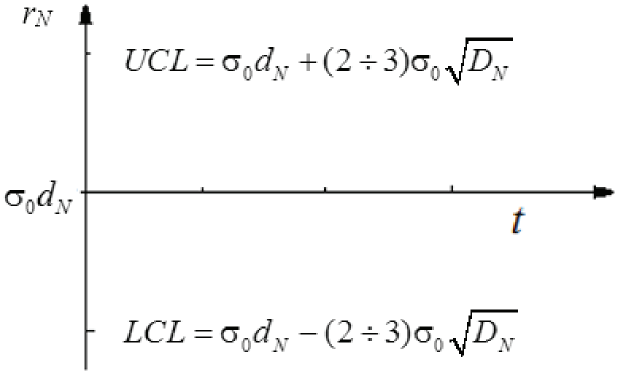
$$u \to \hat{u} = \frac{\textit{общее число несоответствий в } I \textit{ выборках}}{IN}.$$

2.3. Контрольные карты при нормативном задании процесса

В нормативных документах указаны должные математическое ожидание a_0 и стандартное отклонение σ_0 процесса. Каковы будут контрольные карты? $\bar{X}$-карта, очевидно, будет иметь вид.



Т. к. $MR_N = \sigma d_N$ и $DR_N = \sigma^2 D_N$, то ожидаемый размах (центральная линия) и стандартное отклонение размаха дадут параметры R-карты.



В формулах для P- и U-карт нужно подставить нормативные значения p_0 и u_0.

2.4. Чувствительность контрольных карт

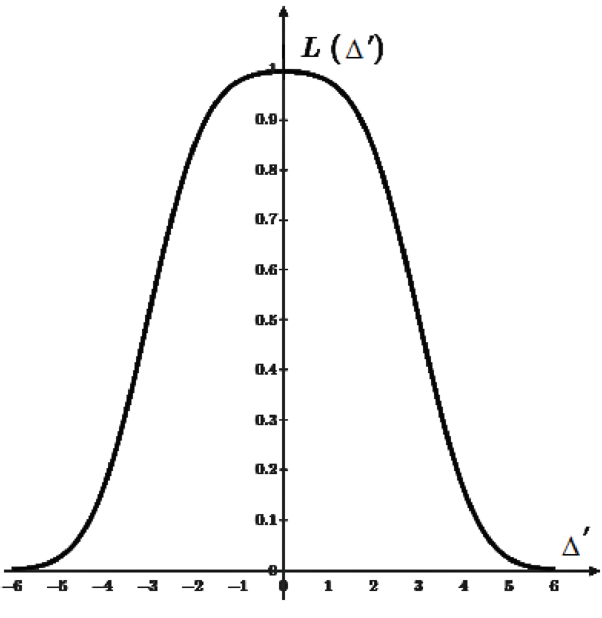
Чувствительность контрольных карт можно измерять вероятностью принять (посчитать стабильным) процесс, в зависимости от величины сдвига (скажем, у среднего), который появился. Эта функция называется оперативной характеристикой L (.).

Пример 2.5

$\bar{X}$-карта. Пусть центр процесса a_0 сместился в $a_0 + \Delta$. Дисперсия σ^2 не изменилась. Тогда вероятность того, что очередная точка на контрольной карте ляжет внутри $3\sigma_{\bar{X}}$ границ:

$$L = P\{a_0 - 3\sigma/\sqrt{N} < \bar{X} < a_0 + 3\sigma/\sqrt{N} \mid a = a_0 + \Delta\} =$$
$$= P\{a_0 - a_0 - \Delta - 3\sigma/\sqrt{N} < \bar{X} - a_0 - \Delta < a_0 - a_0 - \Delta + 3\sigma/\sqrt{N}\} =$$
$$= P\{\frac{-\Delta - 3\sigma/\sqrt{N}}{\sigma/\sqrt{N}} < \frac{\bar{X} - a_0 - \Delta}{\sigma/\sqrt{N}} < \frac{-\Delta + 3\sigma/\sqrt{N}}{\sigma/\sqrt{N}}\} =$$
$$= \Phi(3 - \Delta\sqrt{N}/\sigma) - \Phi(-3 - \Delta\sqrt{N}/\sigma) = L(\Delta'),$$

$$\Delta' = \frac{\Delta\sqrt{N}}{\sigma}. \qquad (2.1)$$

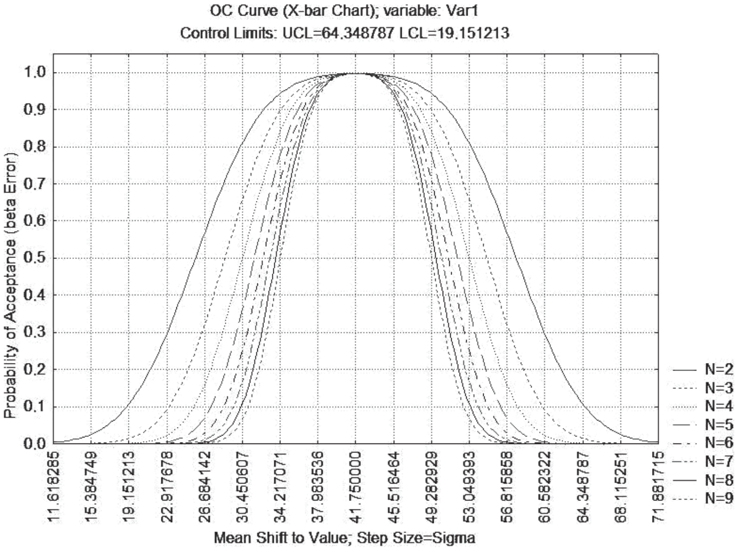


Как повысить чувствительность? Видно, что при тех же Δ и σ, увеличивая N (объем выборок), вероятность принять сдвинутый процесс уменьшится (а неизменённый процесс останется ≈ 1).

В *STATISTICA* при построении контрольных карт (см. упр. 5.3) кнопка *OC* $\bar{X}$ строит графики L в зависимости от (a_0+ Δ), при заданном (или оценённом) σ и различных N.

Пример 2.6 (продолжение примера 2.2)

Для «3σ» $\bar{X}$ -карты с оценкой σ = 7.5329 *OC* будет:



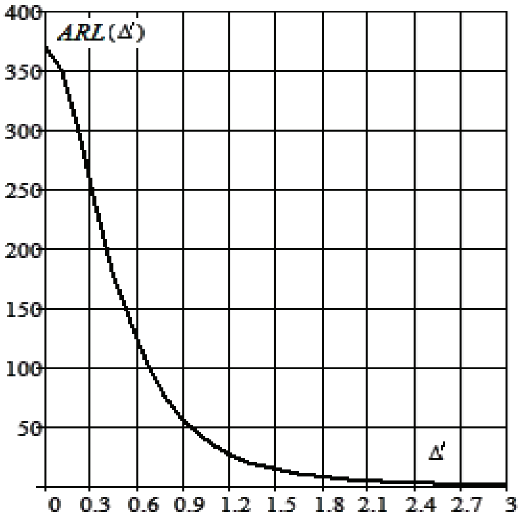
Здесь *Control Limits* указаны при N = 1! Т.е. центр ± 3σ (или сколько зададим сигма). Потому что здесь предлагается выбрать N из предложенных вариантов для окончательной КК (проверить, что расчёт этих кривых идёт по формуле 2.1).

Например, при сдвиге Δ = 2σ a_0+ Δ= 56.8159 и вероятность точке на КК попасть внутрь «3σ» контрольных границ (принять процесс) β = 0.33 при N = 3 и β = 0.04 при N = 6.

Другая мера чувствительности КК — *ARL (Average Run Length)*. *ARL* — это математическое ожидание длины последовательности точек на КК по первый выход за контрольные границы.

Если вероятность независимой точке попасть за контрольные границы есть $(1 — L(\Delta'))$, то вероятность получить последовательность длины l есть $L(\Delta')^{l-1}(1 — L(\Delta'))$.

$ML = \Sigma l\, L(\Delta')^{l-1}(1 — L(\Delta'))$ = (дифференцируя геометрическую прогрессию) $= (1 — L(\Delta'))(1/(1 — L(\Delta'))^2 = 1/(1 — L(\Delta')) =$ $= ARL(\Delta')$.



Например, при $N = 9$ и смещении центра процесса на $\Delta = \sigma/3$ средняя длина последовательности до получения тревоги составит ≈50. А ложная тревога возникала бы через ≈370.

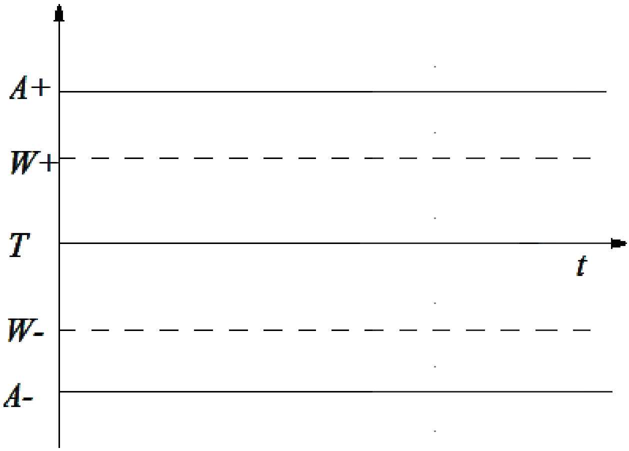
2.5. Модифицированные диаграммы Шухарта

В этих диаграммах чувствительность повышается за счёт учёта информации о положении последовательных точек на КК по отношению к вспомогательным (предупреждающим) линиям. Например, рассмотрим ГОСТ Р 50779.41–96 (ИСО

7873–93) «Контрольные карты для арифметического среднего с предупреждающими границами».

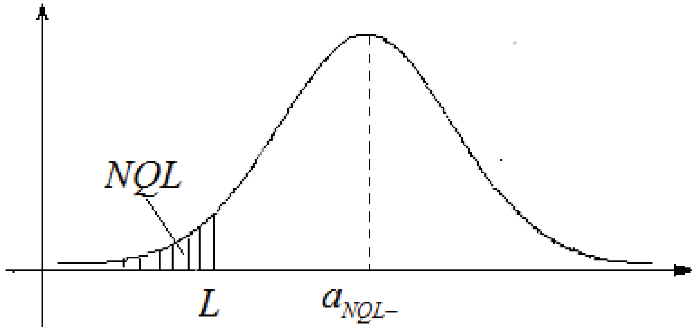
На контрольной карте наносятся:

1) целевая (центральная) линия процесса T, соответствующая центру поля допусков контролируемого параметра, т. е. a_0;
2) предупреждающие границы $W\ a_0 \pm B_2 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$;
3) границы регулирования (тревоги) $A\ a_0 \pm B_1 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$.



Правило: если хотя бы одна точка попала в верхнюю критическую зону A_+ или нижнюю критическую зону A_-, то это сигнал о выходе процесса из-под контроля. Равным образом, если установленное количество K последовательных точек попадает в одну из предупреждающих зон — верхнюю W_+ или нижнюю W_-, то это сигнал о выходе процесса из-под контроля.

Выбор параметров контроля B_1, B_2 и K осуществляется исходя из заданных требований к качеству продукции: поле допусков (L и/или U), NQL — доля (или%) несоответствующих единиц продукции. Зная σ, это легко переводится в требования к качеству процесса: a_0, a_{NQL-} и/или a_{NQL+}. Например, a_{NQL-} — предельное положение центра процесса (внизу от a_0), после которого доля (%) несоответствующих единиц продукции будет выше допустимой.



$$a_{NQL-} = L + \sigma u_{1-NQL}\,,\ a_{NQL+} = U - \sigma u_{1-NQL}\,. \tag{2.2}$$

Или нормированное значение $\delta = \dfrac{a_0 - a_{NQL-}}{\sigma} = \dfrac{a_{NQL+} - a_0}{\sigma}$ смещения является заданным (неизменным) параметром.

Далее в таблицах 1–4 ГОСТа для всевозможных сочетаний B_1= (2.75, 3, 3.25), B_2 = (1, 1.25, 1.5, 1.75, 2), K = (2, 3, 4), $\delta\sqrt{N}$ = (0, 0.2, 0.4, ...3.6, 3.8) приводятся значения ARL. Для двустороннего критерия L_0 находят по табл. 4, а L_1 — по табл. 4 для

$\delta\sqrt{N} < 1$ и по табл. 1–3 при >1. Для одностороннего — все по табл. 1–3.

В строке $\delta\sqrt{N} = 0$ подбираем *ARL*, соответствующее несмещённому процессу (L_0), большим, чтобы была низкой вероятность ложной тревоги. В других строках $\delta\sqrt{N}$, при прочих таких же параметрах, подбираем *ARL*, соответствующее смещённому процессу ($L_1 = L_{NQL}$), малым, чтобы быстро обнаружить неудовлетворительное состояние процесса. Надо рассмотреть несколько вариантов выбора параметров B_1, B_2, K, N и остановиться на обеспечивающем наибольшее значение отношения L_0 / L_{NQL} (желательно $\geqslant 40$).

Можно начать подбор параметров КК, задавшись L_0 и L_{NQL}.

Пример 2.7 (Приложение Б к ГОСТ Р 50779.41–96)

Рассчитать КК с предупреждающими границами для производственного процесса поддержания концентрации азота в аммиаке. Номинальная концентрация $a_0 = 25\%$, $U = 27.5\%$, $L = 22.5\%$, $\sigma = 1\%$, $NQL = 3\%$.

Поскольку в двустороннем критерии $\dfrac{U - a_{NQL-}}{\sigma} = \dfrac{a_{NQL+} - L}{\sigma} > 3$,

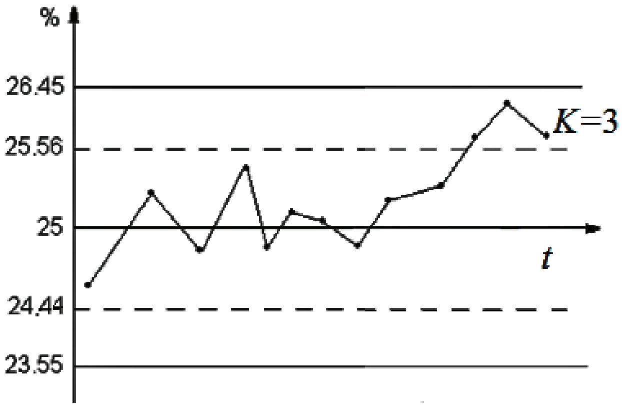
то формулы (2.2) применимы и в двустороннем критерии.

$a_{NQL-} = L + \sigma u_{1\ -\ NQL} = 22.5\% + 1\% \cdot u_{1-0,03} = 24.38\%$, $a_{NQL+} = 25.62\%$,

$$\delta = \frac{-a_{NQL-} + a_0}{\sigma} = \frac{25 - 24.38}{1} = 0.62.$$

Примем $N = 5$. $\delta\sqrt{N} = 0.62 \cdot \sqrt{5} = 1.385$. По табл. 4 находим $L_0 = 309.3$ и по табл. 3 $L_1 = 8.8$ при $K = 3$, $B_1 = 3.25$, $B_2 = 1.25$.

Верхняя граница регулирования: $a_0 + B_1 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 26.45$. Нижняя граница регулирования: $a_0 - B_1 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 23.55$. Верхняя предупреждающая граница: $a_0 + B_2 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 25.56$. Нижняя предупреждающая граница: $a_0 - B_2 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 24.44$.



Например, при изображённой ситуации необходимо принять решение о наладке процесса.

Упражнения

Упражнение 2.1

По двум выборкам из невозмущённого процесса 61, 65, 66 и 71, 64, 64 на основе правила 3 сигм найти верхнюю границу контрольной карты $\bar{X}$. Ответ: 71.3.

Упражнение 2.2

По двум выборкам из невозмущённого процесса 61, 65, 66 и 71, 64, 64 на основе правила 3 сигм найти верхнюю границу контрольной карты R. Ответ: 15.4.

Упражнение 2.3

Какова вероятность двум последовательным точкам оказаться внутри «3σ» границ регулирования $\bar{X}$ контрольной карты если стандартное отклонение процесса — 3 мм, объём выборок — 4, центр процесса сместился на 2 мм вверх. Ответ: 0.907.

Упражнение 2.4

Какова чувствительность (значение оперативной характеристики) «2σ» $\bar{X}$ контрольной карты, если стандартное отклонение процесса — 2 мм, объём выборок — 5, центр процесса сместился на 2 мм вниз. Ответ: 0.407.

Упражнение 2.5

Рассчитать для $\bar{X}$ контрольной карты с предупреждающими границами отношение средней длины последовательности ложной тревоги к средней длине последовательности обнаружения недопустимого смещения. Номинал — 20, поле допусков [16, 24], сигма — 1.52, NQL = 10 %. Объём выборок — 5, число точек в предупреждающей зоне — 4, коэффициенты для предупреждающих границ — 1.75, для границ регулирования — 3. Использовать ближайшие значения в таблицах ГОСТа. Ответ: 173.

3. ВЫБОРОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

3.1. Выборочный контроль по альтернативному признаку

Пример 3.1

Предлагается к продаже партия яиц объёмом M. Часть яиц могут быть тухлыми. Необходимо определить, покупать ли партию, если вы решили, что партия хороша, если в ней число тухлых яиц $\leqslant l_0$, и плоха — если число тухлых яиц $\geqslant l_1$ ($l_1 > l_0$).

Проведём выборочный контроль. Выберем на удачу N штук яиц из партии, разобьём их. Пусть окажется m — число дефектов (тухлых яиц). Перед проведением контроля нужно наметить m_0 — приёмное число, такое что, если $m \leqslant m_0$ — партию берём, а если $m > m_0$ — не берём.

Риски (вероятности ошибок, возможных при проведении такого контроля):

$\alpha_{10} = P\{\mathrm{H}_1 | \mathrm{H}_0\} = \alpha$ — вероятность отклонить партию, когда на самом деле она хороша (риск поставщика: чем он меньше, тем для него лучше);

$\alpha_{01} = P\{\mathrm{H}_0 | \mathrm{H}_1\} = \beta$ — вероятность взять партию, когда она плоха (риск потребителя; чем он меньше, тем для него лучше).

Рассчитаем эти риски:

$\alpha_{10} = P\{M_N > m_0 | L = l_0\} = 1 - P\{M_N \leqslant m_0 | L = l_0\}$,

M_N — случайное число несоответствующих изделий в выборке (число тухлых яиц), L — случайное число несоответствующих изделий в партии.

$$\alpha_{10} = 1 - \Phi^{Hypgeo}_{M,N,\frac{l_0}{M}}(m_0) = 1 - \sum_{m=0}^{m_0} \frac{C^m_{l_0} C^{N-m}_{M-l_0}}{C^N_M}, \ C^m_n = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

$$\alpha_{01} = P\{\mathrm{M}_N \leqslant m_0 | l_1\} = \Phi^{Hypgeo}_{M,N,\frac{l_1}{M}}(m_0) = \sum_{m=0}^{m_0} \frac{C^m_{l_1} C^{N-m}_{M-l_1}}{C^N_M}.$$

$\Phi^{Hypgeo}_{M,N,p}(x)$ — функция распределения гипергеометрического распределения. В *MathCAD* обозначается: *phypergeom* (*x*, *Mp*, *M* — *Mp*, *N*).

Пример 3.2

Партия из 10 изделий. Она считается хорошей, если число дефектных изделий $\leqslant 2$, плохой — если число дефектных изделий $\geqslant 4$.

Примем план контроля: возьмём выборку объёмом $N = 3$ и приёмное число $m_0 = 1$. Рассчитаем риски поставщика и потребителя: $\alpha_{10} = 0.066$, $\alpha_{01} = 0.67$ — большое значение, значит, план не учитывает интересы потребителя. Изменим план: возьмём выборку объёма $N = 3$ и приёмное число (?) $m_0 = 0$. Получим $\alpha_{10} = 0.53$,

$$\alpha_{01} = \frac{C^0_4 C^3_6}{C^3_{10}} = \frac{\frac{6!}{3!3!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{4\cdot5\cdot6}{8\cdot9\cdot10} = 0.166.$$

Этот план контроля лучше для потребителя.

Пусть M (объем партии) велик: N (объем выборки) $\leqslant 0.1M$, тогда приближённо распределение $M_N \to \mu_N$ (*Hypgeo* $\to$ *Binominal*),

μ_N — число успехов в N независимых испытаниях. И риски можно считать: $\alpha_{10} = P\{\mu_N > m_0 | p_0\} = 1 - \Phi^{Bin}_{N,p_0}(m_0)$,

$\alpha_{01} = P\{\mu_N \leqslant m_0 | p_1\} = \Phi^{Bin}_{N,p_1}(m_0)$. Здесь $p = \dfrac{l}{M}$ — вероятность «успеха» в отдельном испытании.

Если $Np(1-p)$ велико ($\geqslant 10$), то можно перейти (по теореме Муавра — Лапласа) к нормальному распределению и получить формулы, позволяющие выразить параметры плана контроля через риски

$$N = p_0(1-p_0)\frac{(u_{1-\alpha_{10}} + u_{1-\alpha_{01}})^2}{(p_1 - p_0)^2},\quad m_0 = Np_0 + u_{1-\alpha_{10}}\sqrt{N}\cdot\sqrt{p_0(1-p_0)}. \quad (3.1)$$

Пример 3.3

Партия из 1000 изделий. Партия считается хорошей, если число дефектных изделий меньше 200, плохой — если число дефектных изделий больше 400. Заданы риски поставщика и потребителя $\alpha_{10} = \alpha_{01} = 0.01$. Найти план контроля (объем выборки N и приёмное число m_0). $N = \dfrac{0.2\cdot 0.8\cdot(2u_{0.99})^2}{(0.4-0.2)^2} = 86.59 \to 87$, $m_0 = 25.89 \to 26$.

3.2. Стандартизация выборочного контроля по альтернативному признаку

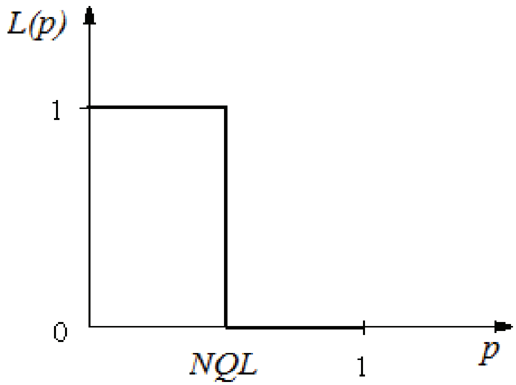
Альтернативный показатель качества имеет две градации: годное или не соответствующее (дефект).

Нормативный уровень несоответствий *NQL — normal quality level* — граничное значение уровня несоответствий (дефектов) в партии, определяющее критерий её качества.

План выборочного контроля: N — объём выборки, m_0 — приёмное число, $c_0 = \dfrac{m_0}{N}$ — приёмная доля, $b_0 = m_0 + 1$ — браковочное число.

Для оценки свойств плана выборочного контроля используется оперативная характеристика плана *OC (Operating Characteristic)* — зависимость вероятности принятия партии этим планом от величины параметра качества в партии.

При контроле по альтернативному признаку параметр качества в партии — доля несоответствий (дефектов) в партии p, и $OC = L\ (p)$. Оперативная характеристика идеального плана контроля:

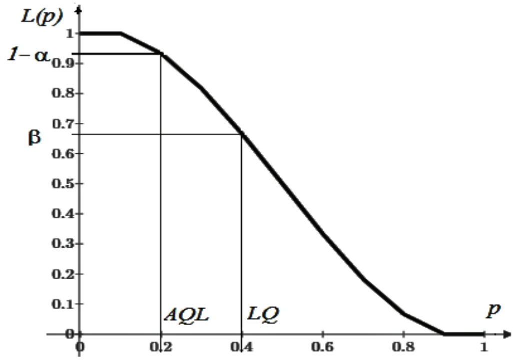


Т.е. хорошие партии все принимаются, плохие — все отвергаются.

Оперативная характеристика реального плана контроля:

$$L\ (p) = P\{M_N \leqslant m_0 | p\} = \Phi^{Hypgeo}_{M,N,p}(m_0)\,.$$

Например, при $M = 10$, $N = 3$, $m_0 = 1$ (как в примере 3.2) график имеет следующий вид.



В стандартах используются понятия:

- Приемлемый уровень качества *AQL — Acceptable quality level* — максимальный уровень несоответствий, который ещё рассматривается как удовлетворительный.

$$AQL = \frac{l_0}{M} = p_0, \text{ (иногда} \cdot 100\,\%).$$

- Предельное качество (*LQ*) — минимальный уровень несоответствий, который рассматривается как неудовлетворительный.

$$LQ = \frac{l_1}{M} = p_1, \text{ (иногда} \cdot 100\,\%).$$

Тогда их смысл графике:

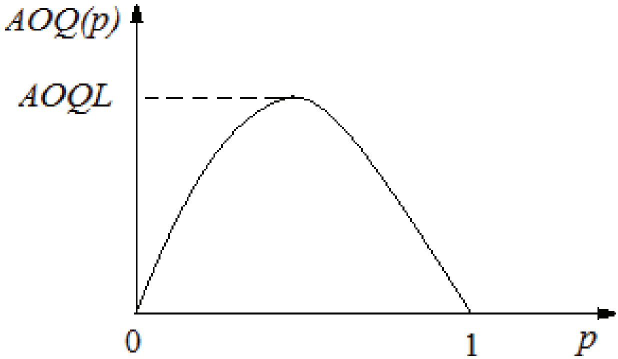
$$L\,(LQ) = \alpha_{01} = \beta,\ L\,(AQL) = \alpha_{00} = 1 - \alpha_{10} = 1 - \alpha.$$

Средним выходным уровнем дефектности *AOQ* (*p*) — *Average Outgoing Quality* — выборочного плана контроля называется математическое ожидание уровня дефектности в принятых и забракованных партиях (в которых после сплошного контроля все обнаруженные дефектные единицы заменены годными) в зависимости от доли дефектных изделий *p* (входного уровня качества).

$$AOQ(p) = \frac{JL(p)(M-N)p + J(1-L(p))0}{JM} = pL(p)(1-\frac{N}{M}) .$$

J — число проверенных партий, *M* — объем партии, *N* — объем выборки. (*M* – *N*) означает, что в принятых партиях в выборке *N* заменили все дефектные изделия.

Т. к. очевидно при $p = 0$ и $p = 1$ $AOQ\ (p) = 0$, существует $AOQL = maxAOQ\ (p)$ — наихудший средний выходной уровень качества. Ясно, что хорошо бы организовать контроль так, чтобы *AOQL* был не больше заданной величины.



ГОСТ 18242–72 «Качество продукции. Статистический приёмочный контроль по альтернативному признаку»

Это аналог стандарта ИСО 2859, который является развитием стандарта *MIL-STD*-105. ГОСТ основан на *AQL* и α (риске поставщика). Рассмотрим его на примере.

Пример 3.4

Пусть *M* (объем партии) равен 40. $AQL = 10\,\%$, риск поставщика $\alpha = 0.05$ (обычное значение). Составить план контроля.

При объёме партии от 20 до 50 ГОСТ рекомендует брать объём выборки $N = 8$ (код объёма выборки D). Осталось найти приёмное (m_0) и браковочное (m_0+1) число при нормальном (бывает ещё усиленный и облегчённый) контроле.

Обоснуем приёмное число m_0 в таблице № 20 ГОСТа. Т. к. $\frac{N}{M} = \frac{8}{40} = 0.2$ относительно малое, переходим к биномиальному распределению.

$$\alpha = \alpha_{10} = P\{M_N > m_0 \mid AQL\} \approx 1 - P\{\mu_N \le m_0 \mid AQL\}.$$

Если установить приёмное число $m_0 = 1$, $1 - \Phi^{Bin}_{8;0.1}(1) = 1 - 0.813 = 0.187;\ 0.187 > 0.05$. Риск не обеспечивается, увеличим приёмное число: $m_0 = 2$. $1 - \Phi^{Bin}_{8;0.1}(2) = 1 - 0.962 = 0.038;\ 0.038 < 0.05$. Приёмное число $m_0 = 2$ обеспечивает нужный риск поставщика. Браковочное число 3.

В этом же ГОСТе есть таблица № 33, дающая возможность определить LQ, которое соответствует риску потребителя $\beta = 0.1$ при плане контроля, определённом выше. $LQ = 54\%$. Проверим $\beta = \alpha_{01} = P\{\mu_8 \le 2 \mid LQ\} = \Phi^{Bin}_{8;0.538}(2) = 0.1$.

Если понижаем риск β, то LQ возрастает у фиксированного плана контроля.

ГОСТ также даёт возможность определить $AOQL$ (при уже определённом плане контроля). В нашем примере: коэффициент $K = 17\%$, $AOQL = K(1 - \frac{N}{M}) = 13.6\%$.

В формулах (3.1) мы строили план контроля по четырем точкам AQL, LQ, α, β и получали N и m_0. Но в ГОСТ 18242–72 подход иной: в нем α, AQL и N сразу заданы — по ним находится m_0. LQ, β не используются, но можно, задав β, найти LQ при уже найденном плане контроля.

3.3. Выборочный контроль по количественному признаку

Показатель качества партии — среднее значение некоторой контролируемой величины ξ, характеризующей отдельные изделия.

Пусть имеется партия свежих яиц. Показатель качества партии — средний вес a яйца в партии. Партия считается хорошей, если $a \geqslant a_0$, и плохой — если $a \leqslant a_1$.

Выборочный контроль: возьмём выборку объёма N, у всех измерим интересующую величину, найдём выборочное среднее $\bar{x}$, сравним с приёмным выборочным средним $\bar{x}_0$. Если $\bar{x} \geqslant \bar{x}_0$ — принимаем партию, а если $\bar{x} < \bar{x}_0$ – бракуем. Две величины N и $\bar{x}_0$ составляют план контроля.

Контролируемая величина имеет нормальное распределение.

Считаем, что дисперсия $D\xi = \sigma^2$ известна. Найдём риски:

$$\alpha_{10} = P\{\bar{X} < \bar{x}_0 \mid a_0\} = \mid \bar{X} \sim N(a_{0,} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) \mid = P\{\frac{\bar{X} - a_0}{\sigma / \sqrt{N}} < \frac{\bar{x}_0 - a_0}{\sigma / \sqrt{N}}\} = \Phi(\frac{\bar{x}_0 - a_0}{\sigma / \sqrt{N}}),$$

$$\alpha_{01} = P\{\bar{X} \geq \bar{x}_0 \mid a_1\} = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}_0 - a_1}{\sigma / \sqrt{N}}\right). \tag{3.2}$$

Из этих формул можно найти решение обратной задачи: по известным α, β, $a_{1.}$, a_0 разработать план контроля, т. е. найти N и $\bar{x}_0$.

$$N = \frac{\sigma^2\left(u_{1-\alpha_{10}} + u_{1-\alpha_{01}}\right)^2}{\left(a_1 - a_0\right)^2}, \; \bar{x}_0 = a_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} u_{1-\alpha_{01}}. \tag{3.3}$$

Пример 3.5

Партия яиц считается хорошей, если средний вес яйца ⩾ 80 г, и негодной, если средний вес яйца ⩽ 60 г. Составить план контроля, обеспечивающий $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.05$, если дисперсия веса известна (= 100 г²).

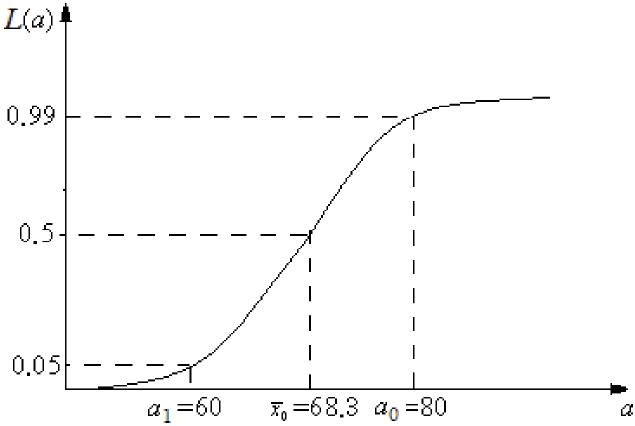
$$N = \frac{100\left(u_{0.99} + u_{0.95}\right)^2}{20^2} = \frac{\left(2.32 + 1.645\right)^2}{4} = 3.94 \approx 4,$$

$\bar{x}_0 = 60 + \dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{3.94}} 1.645 = 68.3$. Ответ: $N = 4$, $\bar{x}_0 = 68.3$ г.

Оперативная характеристика L — вероятность принять партию этим планом в зависимости от показателя качества партии.

$$L(a) = P\left\{\bar{X} \geq \bar{x}_0 \mid a\right\} = \Phi\left(\frac{a - \bar{x}_0}{\sigma / \sqrt{N}}\right). \tag{3.4}$$

Подставим $N = 4$, $\bar{x}_0 = 68.3$.



Чем круче идёт оперативная характеристика, тем план контроля лучше.

Контролируемая величина имеет показательное распределение.

Например, ξ — время наработки на отказ (например, горение лампочки), $p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, λ — интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени). $M\xi = 1/\lambda = MTTF$ — среднее время работы до отказа. $\lambda_0 = \dfrac{1}{MTTF_0}$ — партия хороша, $\lambda_1 = \dfrac{1}{MTTF_1}$ — партия плоха. Выборочный контроль: выберем N лампочек, определяем время горения каждой, если

$$\begin{cases} \bar{x} \geq \bar{x}_0 \to \textit{берём партию}, \\ \bar{x} < \bar{x}_0 \to \textit{отклоняем}. \end{cases}$$

$\bar{x}_0$ — приёмное выборочное среднее.

Известно, что плотность распределения выборочного среднего из показательного распределения с параметром λ имеет вид $p_{\bar{X}}(x) = 2\lambda N p_{\chi^2,2N}(2\lambda N x)$. Легко получить формулы для рисков поставщика и потребителя при одноступенчатом выборочном контроле.

$$\alpha_{10} = \Phi_{2N}^{\chi^2}(2\lambda_0 N \bar{x}_0),\ \alpha_{01} = 1 - \Phi_{2N}^{\chi^2}(2\lambda_1 N \bar{x}_0). \qquad (3.5)$$

Учитывая, что при $m \to \infty$ (m велико при $\geqslant 30$) $\chi^2_m \to N$ (...), — можно перейти к нормальному распределению и планировать контроль по заданным рискам

$$N = \left(\frac{\lambda_0^{-1} u_{1-\alpha_{10}} + \lambda_1^{-1} u_{1-\alpha_{01}}}{\lambda_1^{-1} - \lambda_0^{-1}}\right)^2,\ \bar{x}_0 = \lambda_1^{-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}} u_{1-\alpha_{01}}\right). \qquad (3.6)$$

3.4. Стандартизация выборочного контроля по количественному признаку

Изделие обладает несоответствием по контролируемому параметру, если измеренное значение этого параметра:

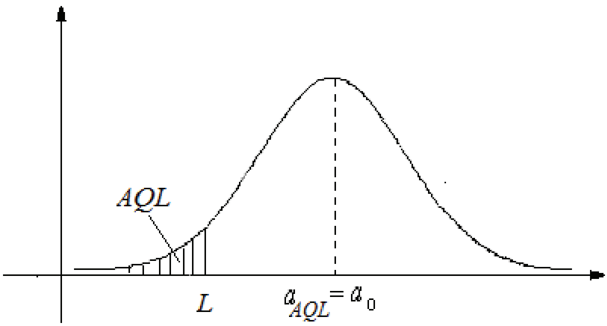
1) меньше нижнего предельного значения L; или может быть
2) больше верхнего предельного значения U; или может быть
3) выходит за отрезок $[L;\ U]$,

в зависимости от того, что важно. Примеры контролируемых параметров: 1) вес яйца, 2) температура в холодильнике, 3) размер двери.

В стандарте принято задавать: AQL — приемлемая доля (вероятность) несоответствующих изделий в партии (а не среднее значение параметра в приемлемой партии a_0).

Найдём связь между AQL и a_0 в случае, когда исследуемый параметр имеет нормальное распределение, дисперсия σ^2 известна.

1) Спецификация задана только нижней границей L,



AQL — вероятность того, что контролируемый параметр будет меньше нижнего предельного значения L (вероятность наткнуться на несоответствие);

$$AQL = P\{\xi \le L\} = P\left\{\frac{\xi - a_{AQL}}{\sigma} \le \frac{L - a_{AQL}}{\sigma}\right\} = \Phi\left\{\frac{L - a_{AQL}}{\sigma}\right\},$$

$$u_{AQL} = \frac{L - a_{AQL}}{\sigma},\ a_{AQL} = L - \sigma u_{AQL}.$$

Ясно, подобная связь есть и для $a_{LQ} = L - \sigma u_{LQ}$.

Подставляя это вместо a_0 и a_1 в наши прежние формулы (3.3), получим для плана контроля по четырем точкам (α_{10} и α_{01} известны):

$$N = \left(\frac{u_\alpha + u_\beta}{u_{AQL} - u_{LQ}} \right)^2, \ \bar{x}_0 = L - \sigma u_{AQL} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} u_\alpha \text{ или}$$

$$\bar{x}_0 = L - \sigma u_{LQ} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} u_\beta .$$

Для случаев 2) и 3) можно получить соответствующие формулы.

В стандарте для планирования контроля приводятся, конечно, не приёмные средние $\bar{x}_0$, а универсальные безразмерные относительные величины K — приёмочные коэффициенты, например $K = \dfrac{\bar{x}_0 - L}{\sigma}$, с которым сравнивается не $\bar{x}$, а коэффициент Q: $Q = \dfrac{\bar{x} - L}{\sigma}$. $\begin{cases} \textit{Если } \mathrm{Q} \ge K, \textit{ то партию принимаем}, \\ \textit{Если } \mathrm{Q} < K, \textit{ то бракуем партию} \end{cases}$.

Параметр K определяется по таблицам ГОСТов, в которых заложены те или иные идеологии выборочного контроля.

ГОСТ 20736–75 «Статистический приёмочный контроль по количественному признаку. Планы контроля»

Этот ГОСТ основан, как и ГОСТ 18242–72, на *AQL* и α. *N* (объем выборки) задаётся сразу, по известному объёму партии. И по таблицам ГОСТа находится приёмочный коэффициент $K = \dfrac{\bar{x}_0 - L}{\sigma} = \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{N}} - u_{AQL}$.

Пример 3.6

Объем выборки $N = 200$, приемлемый уровень качества $AQL = 0.1$, $\alpha = 0.1$. Приёмочный коэффициент $K = \frac{-1.28}{\sqrt{200}} + 1.28 = 1.07$.

При неизвестной дисперсии σ^2 заменяем её оценкой по контрольной выборке. В формулах рисков возникает распределение Стьюдента, и приёмочный коэффициент рассчитывается следующим образом: $K = \frac{t_{\alpha, N-1}}{\sqrt{N}} - u_{AQL}$.

Пример 3.7

На контроль предъявлена партия из 25 термостатов. Показатель качества: температура, должна быть меньше $300\,^0$С ($U = 300\,^0$С). Уровень контроля IV, вид — нормальный. Разработать план контроля, если $AQL = 1\,\%$, $\alpha = 0.1$, σ неизвестно.

По таблице 1 — код объёма выборки С. Таблица 6 — $N = 4$, $K = 1.45$.

Как применяется этот план реально? Пусть получена следующая выборка: $x_1 = 280\,^0$С, $x_2 = 295\,^0$С, $x_3 = 290\,^0$С, $x_4 = 283\,^0$С. Выборочное среднее $\bar{x} = 287\,^0$С, $s = 6.8\,^0$С. Находим $Q = \frac{U - \bar{x}}{s}$,

$Q = \frac{300 - 287}{6.8} = 1.91$. Т.к. $Q \geqslant K$, то партию принимаем. LQ уже определён (и связан с β).

Поскольку в ГОСТе показатель качества партии выражен через долю несоответствующих изделий p, то и оперативная характеристика должна быть функцией p. Характеристики плана контроля в ней тоже лучше выразить через определяющие план N, AQL, α.

Пусть для примера спецификация задана нижней границей, σ — известна.

Подставим в (3.4) $\bar{x}_0 = L - \sigma u_{AQL} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} u_\alpha$ и свяжем $a = L - \sigma u_p$.

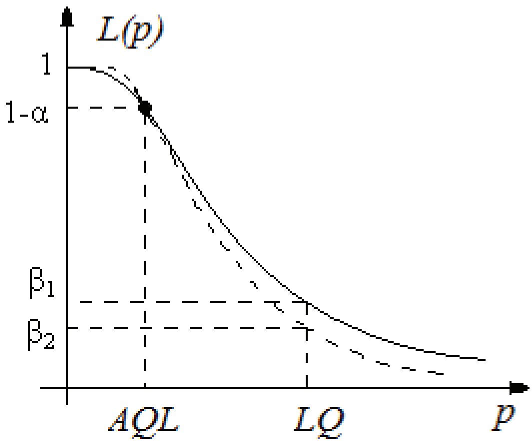
a — среднее значение показателя в партии. Тогда

$$L(p) = L(p, N, AQL, \alpha) = \Phi\left(\frac{L - \sigma u_p - L + \sigma u_{AQL} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} u_\alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) =$$

$$= \Phi((-u_p + u_{AQL})\sqrt{N} - u_\alpha) = \Phi(u_{1-\alpha} + (u_{AQL} - u_p)\sqrt{N})$$

– не зависит от σ!

В семействе графиков по N α не будет меняться. А будут меняться β, приёмное среднее, т. е. K.



С увеличением объёма выборки (пунктирная кривая) риск потребителя уменьшается, а поставщика — остаётся постоянным.

3.5. Принцип распределения приоритетов

В настоящее время стандартизированы два подхода (две идеологии) к организации и планированию выборочного контроля качества продукции:

1) Традиционный — основан на AQL, α. Примеры: ГОСТ 18242 — контроль по альтернативному признаку, ГОСТ 20736 — контроль по количественному признаку.

2) Принцип распределения приоритетов. Смотри об этом ГОСТ Р 50779.30–95 «Статистические методы. Приёмочный контроль качества. Общие требования». Правовые преимущества такого подхода рассмотрены в [5]. В этом случае поставщик и потребитель согласовывают в договоре на поставку следующие основные параметры: NQL, риск поставщика при контроле потребителя, риск потребителя при контроле поставщика (остальные параметры и формы контроля каждая сторона выбирает сама (приоритет), но при этом на неё возлагается обязанность доказывать правильность решений, затрагивающих другую сторону).

Если в договоре не указано другое, то обычно используют $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.25$.

Пусть опять: несоответствие — параметр меньше L, дисперсия известна.

1) Как разработать план поставщику: исходные данные β, NQL.

$$\beta = \alpha_{01} = P\{\bar{X} \geqslant \bar{x}_0 \,|NQL\} = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}_0 - a_{NQL}}{\sigma/\sqrt{N}}\right) = \Phi\left(\frac{a_{NQL} - \bar{x}_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right).$$

Отсюда $u_\beta = \dfrac{a_{NQL} - \bar{x}_0}{\sigma/\sqrt{N}}$, $\bar{x}_0 = a_{NQL} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} u_\beta$, как и ранее, перейдём к доле *NQL* несоответствующих изделий: $a_{NQL} = L - \sigma u_{NQL}$.

Введём приёмочный коэффициент $K_1 = \dfrac{\bar{x}_0 - L}{\sigma}$; подставляя всё, получим $K_1 = -u_{NQL} - \dfrac{u_\beta}{\sqrt{N}}$. Значения K_1 по этой формуле приведены в табл. 4–8 ГОСТ Р 50779.53–98. *N* нужно задать заранее (или см. соображения ниже по выбору *N*).

Пример 3.8

Организовать контроль поставщика: $NQL = 1\%$, $\beta = 0.1$, $N = 4$.

$K_1 = u_{0.99} + \dfrac{u_{0.9}}{\sqrt{4}} = 2.326 + \dfrac{1.282}{2} = 2.967$. Смотрим в таблице $K_1 = 2.97$! План контроля: $N = 4$, $K_1 = 2.97$. По выборке находим $Q = \dfrac{\bar{x} - L}{\sigma}$ и $\begin{cases} \textit{Если } Q \ge K_1, \textit{ то принимаем партию} \\ \textit{Если } Q < K_1, \textit{ то бракуем партию} \end{cases}$.

Иногда поставщик выбирает *N*, руководствуясь формулами из плана контроля по четырем точкам: $N = \left(\dfrac{u_{0,05} + u_\beta}{u_{NQL} - u_{FL}} \right)^2$, где *FL* — фактический уровень несоответствий процесса поставщика, который он должен отслеживать и знать. (Ясно, $FL < NQL$).

Иногда вместо *FL* используют уровень, отвечающий величине «запаса качества» $g = \dfrac{a_{GL} - L}{\sigma}$. Ясно, задавшись *g*, можно найти $a_{GL} \to u_{GL}$, которая используется вместо $u_{FL} \to N$. Такой подход рассмотрен в приложении А ГОСТ Р 50779.53

2) Как разработать план потребителю: исходные данные α, NQL.

Подобный вывод даст

$$\bar{x}_0 = a_{NQL} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} u_\alpha \,, \tag{3.7}$$

теперь $K_2 = \dfrac{\bar{x}_0 - L}{\sigma}$ или

$$K_2 = -u_{NQL} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{N}} \,. \tag{3.8}$$

K_2 содержатся в табл. 11 ГОСТа. N выбирается по приведённым выше соображениям.

Пример 3.9

Дано: $\alpha = 0.05$, $NQL = 1\,\%$, $N = 4$, по (3.8) $K_2 = 1.504$. По таблице 11: $K_2 = 1.69$! Это опечатка в ГОСТе: вся строка для $N = 4$ неверна! Другие строки, например: $NQL = 25\,\%$, $N = 6$, $\alpha = 0.05$, K_2 по (3.8) = 0.003, по табл. = 0.00 — верно!

3.6. Выборочный контроль однородности продукции

Показатель качества партии — дисперсия некоторой величины, характеризующей отдельные изделия. $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ — «хорошая» партия, $\sigma^2 \leq \sigma_1^2$ — «плохая» партия ($\sigma_0^2 < \sigma_1^2$). План контроля: выборка объёма N, по ней оценка дисперсии и сравнение с приёмной оценкой дисперсии.

1. Если математическое ожидание a известно, то можно оценивать дисперсию по статистике $S_0^2 = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}(X^n - a)^2$, тогда

$$\alpha_{10} = P\left\{S_0^2 > (s_0^2)_0 \mid \sigma_0^2\right\} = \left\{\frac{S_0^2 N}{\sigma_0^2} \sim \chi_N^2\right\} = \ldots = 1 - \Phi_N^{\chi^2}\left(\frac{(s_0^2)_0 N}{\sigma_0^2}\right),$$

$\alpha_{01} = \Phi_N^{\chi^2}\left(\frac{(s_0^2)_0 N}{\sigma_1^2}\right)$, $(s_0^2)_0$ — приёмная оценка дисперсии.

2. Если математическое ожидание не известно и оценивается по той же выборке, то оценка дисперсии $S^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{n=1}^{N}(X^n)^2 - N\bar{X}^2\right]$ и в формулах для рисков нужно заменить N на $N - 1$ и $(s_0^2)_0$ на $(s^2)_0$.

Пример 3.10

О качестве штамповок судят по рассеиванию их высот. Высоты распределены по нормальному закону с $a = 32$ мм. Пусть задано $\sigma_0 = 0.18$ мм, $\sigma_1 = 0.3$ мм, объем выборки примем $N = 15$, приёмная оценка $(s_0)_0 = 0.22$ мм. Рассчитать риски плана.

$$\alpha_{10} = 1 - \Phi_{15}^{\chi^2}\left(\frac{0.22^2 \cdot 15}{0.18^2}\right) = 1 - \Phi_{15}^{\chi^2}(22.46) = 0.098.$$

$$\alpha_{01} = \Phi_{15}^{\chi^2}\left(\frac{0.22^2 \cdot 15}{0.3^2}\right) = \Phi_{12}^{\chi^2}(8.06) = 0.079.$$

Зачем дано a? (Для фактического применения плана придётся по контрольной выборке вычислять s_0 для сравнения $(s_0)_0$).

3.7. Некоторые нестандартные формулировки задач на одноступенчатый выборочный контроль

Из ГОСТ Р 50779.25–2005 «Статистические методы. Статистическое представление данных. Мощность тестов для средних и дисперсий».

Пример 3.11

Поставщик хлопковой пряжи утверждает (гипотеза H_0), что среднее разрывное усилие пряжи в бобинах в партии не менее 2.3 Н (= a_{NQL}), гипотеза H_1 — это не так. Известно $\sigma = 0.33$ Н. Потребитель должен организовать входной контроль, обеспечивающий риск поставщика не более 0.05.

По формуле (3.7) при $N = 10$ приёмное среднее $\bar{x}_0 = 2.128$ Н.

Каков будет при этом риск потребителя при $a_1 = 2.1$? По формуле (3.2) $\beta = 0.3928$.

Потребитель считает этот риск большим и решает увеличить N, чтобы сделать свой риск 0.1. По формулам (3.3) с заменой $a_0 = a_{NQL}$ получим $N = 23.32$, чтобы при этом сохранился риск поставщика, придётся изменить приёмное среднее: $\bar{x}_0 = 2.19$.

Пример 3.12

Если σ не известна. Для контроля используется критерий Стьюдента уровня α: оцениваем по выборке $\bar{x}$ и s, рассчитываем $sl = \Phi^{Cm}_{N-1}\left(\dfrac{\bar{x} - a_0}{\dfrac{s}{\sqrt{N}}}\right)$, сравниваем $sl \overset{>}{\underset{<}{}} \alpha \Rightarrow \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \end{matrix}$, т. е. принимаем партию или нет.

Каков будет при этом риск потребителя при $a_1 = 2.1$ и $\sigma_1 = 0.45$ (как худшее из неизвестного возможного)?

$$\beta = \alpha_{01} = P\{SL > \alpha \mid H_1\} = 1 - w(\alpha, H_1) = 1 - \Phi^{Cm}_{N-1, \frac{a_1 - a_0}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}}}(t_{\alpha, N-1}) = 0.636$$

(при $\sigma_1 = 0.33$ было бы 0.45). Здесь $\Phi^{\text{Ст}}_{N,c}(.)$ — функция распределения случайной величины с нецентральным распределением Стьюдента с N степенями свободы и параметром не центральности c. О расчётах с ней в *STATISTICA* см., например, [2].

Потребитель считает этот риск большим и желает увеличить *N,* чтобы сделать свой риск 0.1. По графику *Power vs. N* находим, что $w = 0.9$ будет при $N = 44.7$ (ГОСТ даёт 45).

О теоретико-игровом подходе к выборочному контролю качества продукции см., например, [2, стр. 90–91].

3.8. Последовательные планы выборочного контроля

Наряду с рассмотренными одноступенчатыми планами (когда контрольная выборка берётся один раз) применяют двухступенчатые (когда после анализа первой выборки партию или принимают, или бракуют, или берут ещё одну выборку для окончательного решения на основе объединённой выборки), многоступенчатые и последовательные планы.

Последовательные планы основаны на последовательном анализе А. Вальда.

ГОСТ Р 50779.75–99 «Статистические методы. Последовательные планы выборочного контроля по альтернативному признаку»

В ГОСТе используются формулы биноминального последовательного критерия отношения правдоподобий (см. [2, стр. 63–64]). Для построения областей графика последовательного контроля, в таблице 1 ГОСТа входными параметрами являются:

$PRQ = P_{Accept} \cdot 100\,\% = p_0 \cdot 100\,\%$ — уровень качества для риска поставщика,

$CRQ = P_{Reject} \cdot 100\,\% = p_1 \cdot 100\,\%$ — уровень качества для риска потребителя,

α, β — риски.

Выходные величины (параметры графика): $h_{Accept} = -h_1$, $h_{Reject} = h_2$, $g = h_3$. Здесь h_1, h_2,— точки пересечения с вертикальной осью прямых, разделяющих области принятия гипотез, а h_3 — их угловой коэффициент.

Случай распределения приоритетов (Приложение Д ГОСТа)

1) Контроль поставщика. Формулы и таблицы те же, только $P_R = NQL$, P_A заменяется на P_{FL} — прогноз поставщика фактического уровня его качества (д. б. < NQL);

β — риск потребителя из договора;

α = 0.05 (или другой по усмотрению поставщика).

2) Контроль потребителя. Формулы и таблицы те же, только $P_A = NQL$,

P_R заменяется на (2÷5) NQL на усмотрение потребителя;

α из договора;

β = 0.1 (или другое по усмотрению потребителя).

Упражнения

Упражнение 3.1

Из партии 10 изделий с долей дефектных изделий 0.3 извлечена выборка объёмом 3. Какова вероятность, что в выборке 1 дефектное изделие? Ответ: 0.525.

Упражнение 3.2

Из большой партии с долей дефектных изделий 0.35 извлечена выборка объёмом 4. Какова вероятность, что в выборке 3 дефектных изделия? Ответ: 0.111.

Упражнение 3.3

Партия из 20 банок консервов считается годной, если число испортившихся консервов не превышает 3, и негодной, если это число 5 или больше. При контрольной выборке в 4 банки и приёмном числе 0 найти риск поставщика. Ответ: 0.509.

Упражнение 3.4

Построить график ОС плана контроля по альтернативному признаку ($N = 10$, $m_0 = 3$) партии объёмом 100 шт. Использовать биномиальную аппроксимацию. Для использования таблиц вывести формулу $\Phi^{Bin}_{N,p}(m) = 1 - \Phi^{Bin}_{N,1-p}(N - m - 1)$.

$$\Phi^{Bin}_{N,p}(m) = P\{\mu_N \le m \mid p\} = 1 - P\{\mu_N > m \mid p\} =$$

$$= 1 - P\{\upsilon_N < (N - m) \mid 1 - p\} = 1 - P\{\upsilon_N \le (N - m - 1) \mid 1 - p\} =$$

$$= 1 - \Phi^{Bin}_{N,1-p}(N - m - 1).$$

Упражнение 3.5

Построить график *AOQ (p)* плана контроля из предыдущего упражнения. Найти *AOQL*.

Упражнение 3.6

Выборочный контроль по альтернативному признаку. Случай большой партии. Контрольная выборка объёма 8. $AQL = 10\%$. Найти приёмное число, обеспечивающее риск поставщика 0.05. Ответ: 2.

Упражнение 3.7

Выборочный контроль по альтернативному признаку. Случай большой партии. План контроля (8, 2). $AQL = 10\%$. Найти риск поставщика. Ответ: 0.0381.

Упражнение 3.8

Выборочный контроль по альтернативному признаку. Случай большой партии. План контроля (9, 3). Найти LQ в %, соответствующее риску потребителя 0.1. Ответ: 59.9.

Упражнение 3.9

Для большой партии изделий составить одноступенчатый план контроля, гарантирующий риск поставщика 1% и риск потребителя в 2%, если партия считается хорошей, когда доля дефектных изделий $p \leqslant p0 = 0.1$, и негодной, когда $p \geqslant p1 = 0.2$.

Упражнение 3.10

Проверить приёмное число ГОСТа из примера 3.4 с помощью гипергеометрического распределения.

Упражнение 3.11

Для партии в 70 шт. при $AQL = 4\%$, составить по таблицам ГОСТ 18242–72 план одноступенчатого нормального контроля (степень контроля: общая, II) и указать его характеристики: α, N, m_0, $AOQL$, LQ (при $\beta = 0.05$). Ответ: 0.05, 13, 1, 5.3%, 37%.

Упражнение 3.12

Для партии в 100 шт. при $AQL = 15\%$ составить по таблицам ГОСТ 18242–72 план одноступенчатого нормального контроля (уровень контроля: общий, II). Ответ: 20, 7.

Упражнение 3.13

Для партии в 100 шт. при $AQL = 15\%$ найти по таблицам ГОСТ 18242–72 браковочный уровень качества в% (при $\beta = 0.05$), для плана одноступенчатого нормального контроля (уровень контроля: общий, II). Ответ: 66.

Упражнение 3.14

Для партии в 100 шт. при $AQL = 15\%$ найти с помощью таблиц ГОСТ 18242–72 предел среднего уровня выходного качества в % для плана одноступенчатого нормального контроля (уровень контроля: общий, II). Ответ: 17.6.

Упражнение 3.15

Партия капронового волокна испытывается на прочность. Характеристика прочности, измеряемая в г/денье (удельная прочность), подчиняется закону нормального распределения со стандартным отклонением 0.8 г/денье, причём партия считается хорошей, если среднее значение прочности $\geqslant 5.4$ г/денье, и негодной, если среднее значение прочности $\leqslant 4.9$ г/денье.

Составить одноступенчатый план контроля, обеспечивающий $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.01$.

Упражнение 3.16

Партия болтов считается годной, если среднее значение их прочности $\geqslant 40$ тонн, и негодной, если это среднее значение $\leqslant 30$ тонн. Считая, что прочность болтов распределена по нормальному закону с дисперсией 25 тонн в квадрате, при плане одноступенчатого контроля (5, 36) найти риск поставщика. Ответ: 0.0368.

Упражнение 3.17

Партия болтов считается годной, если среднее значение их прочности $\geqslant 40$ тонн, и негодной, если это среднее значение $\leqslant 30$ тонн. Считая, что прочность болтов распределена по нормальному закону с дисперсией 25 тонн в квадрате, составить план одноступенчатого контроля, обеспечивающий риск поставщика 0.1 и риск потребителя 0.01. Ответ: 3.25, 36.4.

Упражнение 3.18

Выборочный контроль по количественному признаку, распределённому по нормальному закону. Несоответствие — признак $< L$. Вывести формулу для оперативной характеристики (как функции среднего значения признака в партии) планов контроля при различных объёмах выборок при сохранении α_0, α_{10}.

Упражнение 3.19

Получить формулы (3.5).

Упражнение 3.20

Для хорошей партии конденсаторов $MTTF_0$ = 10000 ч, для негодной — $MTTF_1$ = 5000 ч. Контрольная выборка $N = 6$, приёмное выборочное среднее — 8000. Каков риск потребителя? Ответ: 0.0838.

Упражнение 3.21

Для хорошей партии ламп $MTTF_0 = 1300$ ч, для негодной — $MTTF_1 = 700$ ч. Контрольная выборка $N = 10$, приёмное среднее — 1000. Каковы риски поставщика и потребителя?

Упражнение 3.22

Для хорошей партии ламп $MTTF_0 = 1300$ ч, для негодной — $MTTF_1 = 700$ ч. Контрольная выборка $N = 10$. Каково должно быть приёмное среднее, чтобы риск потребителя был 0.01? Каков будет риск поставщика?

Упражнение 3.23

Получить формулы (3.6).

Упражнение 3.24

Для хорошей партии ламп $MTTF_0 = 1300$ ч, для негодной — $MTTF_1 = 700$ ч. Составить план контроля, обеспечивающий $\alpha_{10} = 0.001$, $\alpha_{01} = 0.01$.

Упражнение 3.25

Известно, что если интенсивность отказов = 0.01, то партия гироскопов считается надёжной; если = 0.02, то партия ненадёжна и должна быть забракована. Принимая $\alpha_{10} = \alpha_{01} = 0.001$, составить одноступенчатый план контроля.

Упражнение 3.26

В партии резисторов, случайные значения электрических сопротивлений которых ~ $N(200,?)$, характеристикой качества является σ. Партия хороша, если $\sigma \leqslant \sigma_0 = 10$ ом, и негодна, если $\sigma \geqslant \sigma_1 = 20$ ом. Каковы α и β при $N = 16$, $(s_0)_0 = 12.92$?

Упражнение 3.27

Стандартное отклонение размера в партии — 1 мм, объём выборки — 5. С какой вероятностью оптимальный односторонний критерий уровня 0.05 ошибочно пропустит партию с увеличенным на 1 мм против номинала средним размером? Ответ: 0.277.

Упражнение 3.28

На сколько (в единицах сигма) придётся изменить приёмное среднее для сохранения риска поставщика 0.01 при увеличении объёма выборки с 10 до 24? Тест левосторонний (альтернативная гипотеза «меньше»). Ответ: 0.261.

Упражнение 3.29

Выборочный контроль по количественному признаку, распределённому по нормальному закону. Несоответствие: признак $< L = 50$, $\sigma = 2$, $NQL = 2\%$, $\alpha = 5\%$. Для плана контроля потребителя с $N = 8$ найти приёмное выборочное среднее. Ответ: 52.9.

Упражнение 3.30

Потребитель проводит входной контроль содержания нитратов в партии помидоров, обеспечивая риск поставщика 0.02. $NQL = 0.4$ г/кг. Дисперсия неизвестна. Контрольная выборка объёмом $N = 5$. Каков при этом риск пропустить партию со средним содержанием нитратов 1 г/кг и предполагаемой дисперсией 0.16 (г/кг)^2? Ответ: 0.346.

Упражнение 3.31

Потребитель проводит входной контроль содержания нитратов в партии помидоров, обеспечивая риск поставщика 0.02. $NQL = 0.4$ г/кг. Дисперсия неизвестна. Каков должен быть минимальный объём контрольной выборки, чтобы риск пропустить партию со средним содержанием нитратов 1 г/кг и предполагаемой дисперсией 0.16 (г/кг)^2 был 0.01? Ответ: 11.

Упражнение 3.32

Поставщик должен поставить потребителю партию изделий объёмом 30 шт. По договору поставщик обязуется заменять дефектные изделия, выявленные в процессе эксплуатации партии за свой счёт. Издержки замены одного дефектного изделия — 0.4 у.е. Перед отправкой поставщик проводит выборочную проверку партии. Объем выборки — 3 шт., приёмное число — 1. Издержки проверки одного изделия — 0.2 у.е. Выявленные в выборке дефектные изделия заменяются на годные, это не даёт дополнительных издержек. В отвергнутой партии все изделия проверяются, годные остаются в резерве (например, для замены дефектных в выборке в принятых партиях). Найти риск при доле дефектных изделий в партии 0.25. Ответ: 3.72.

Упражнение 3.33

ГОСТ Р 5077.25–2005 «Статистические методы. Статистическое представление данных. Мощность тестов для средних и дисперсий». Рассмотреть § 5. Сравнение двух средних (дисперсия известна), § 6. Сравнение двух средних (дисперсии неизвестны и равны), § 7. Сравнение дисперсии или стандартного отклонения с заданным значением, § 8. Сравнение двух дисперсий или двух стандартных отклонений. Указать, как это делается в *STATISTICA*.

Упражнение 3.34

ГОСТ Р 50779.75–99 «Статистические методы. Последовательные планы выборочного контроля по альтернативному признаку». Рассмотреть расчёт кривой оперативной характеристики, расчёт среднего объёма выборки (приложение С).

4. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ В УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ

Необходимые сведения о постановке задач регрессионного анализа см., например, [4], планирования эксперимента и дисперсионного анализа [2].

Пример 4.1

Производство обуви. Изучается зависимость срока службы обуви y от следующих факторов:

x_1 — плотность материала подошвы (г/см^3);

x_2 — предел прочности сцепления подошвы с верхом обуви (кг/см^2).

В результате специально подготовленных наблюдений была получена оценка функции регрессии $\hat{y} = 6 + 4x_1 + 12x_2$. Коэффициент детерминации $R^2 = 0.846$ — это доля изменчивости данных, которую описала эта оценка функции регрессии.

Применение этой оценки:

1) Уже в процессе производства, зная x_1 и x_2, можно прогнозировать срок службы обуви.
2) Улучшая x_1 и x_2, можно знать, к каким изменениям y это приведёт.
3) Исходя из необходимого срока службы обуви, можно оптимально выбрать технологически допустимые и экономически оптимальные уровни x_1 и x_2.

4.1. Робастное* проектирование Тагучи

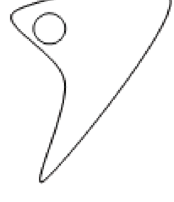
Гэнъити Тагучи (1924–2012 гг.) — японский инженер и статистик, считал, что некачественный продукт имеет характеристики, которые отклоняются от задуманного (идеального) значения. Например, мотор автомобиля должен запускаться при включении зажигания после трёх оборотов коленчатого вала от стартера, но под влиянием низких температур, влажности воздуха, качества топлива, износа (и других возмущений в процессе эксплуатации) мотор может запуститься лишь после 20 оборотов или не запуститься совсем. На этот показатель также влияют отклонения в процессе производства автомобиля.

Факторы в процессе эксплуатации и производства, ухудшающие какой-либо показатель, называют возмущениями (шумами). Устранить до конца шум нельзя, значит, нужно спроектировать продукт и процесс производства так, чтобы они были нечувствительны к этому шуму.

Пример 4.2

Как спроектировать продукт робастным образом? Пусть нужно иметь отверстие в механическом узле, испытывающем большие нагрузки. Где его запроектировать?

Если так, то неточность сверлильного автомата может вынести отверстие на край и изделие разрушится.

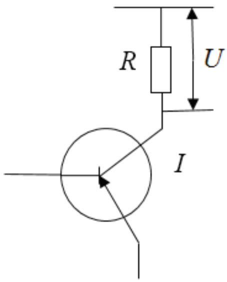


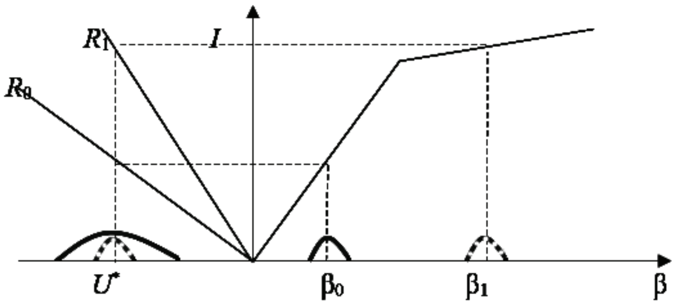
* От слова «*Robust*» — «грубый, не чувствительный».

Робастное проектирование — отверстие нужно сделать максимально далеко от всех краёв.

Пример 4.3

Спроектировать узел, который будет массово выпускаться, так, чтобы напряжение на резисторе было заданное U^* (постоянно).

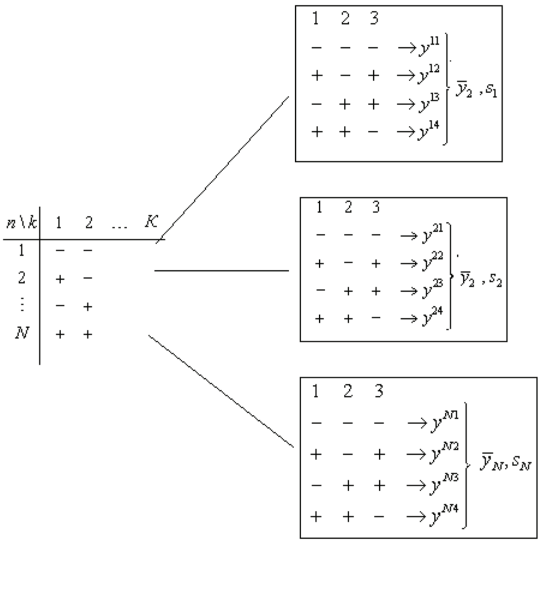




Какой транзистор поставить: с коэффициентом усиления β_0 или β_1? Казалось бы, разницы нет, нужно только будет применить соответствующий резистор R_0 или R_1: $U^* = I_0 R_0 = I_1 U_1$. Но в процессе производства в каждой партии транзисторов есть разброс β, который, однако, по-разному скажется на разбросе выходного напряжения U^*. Проектное решение применить транзистор с коэффициентом β_1 является менее зависимым от разброса комплектующих (робастным).

Часто явные связи между параметрами закладываемых компонентов изделия и вариабельностью выходной величины неизвестны (в отличие от последнего примера), тогда приходится ставить эксперименты по выявлению сочетаний параметров, обеспечивающих наименьшую вариабельность выходной характеристики при наличии возмущений (шума производственного или эксплуатационного характера).

Используется планирование эксперимента. Пусть в распоряжении проектировщика изделия или процесса есть K двухуровневых факторов и присутствуют три шумовых фактора.



В данном случае всего проводится $4N$ экспериментов по измерению выходной характеристики y (на каждом сочетании уровней основных факторов проводят четыре измерения при различных сочетаниях уровней трех шумовых факторов).

Пример 4.4 (продолжение примера 5.3 из [2])

Спроектировать производственный процесс (т. е. выбрать сочетание уровней основных факторов), дающий продукцию (ткань), крепость *STRENGTH* которой наименее подвержена влиянию шумовых факторов.

Можно рассмотреть три фактора производственного шума:

1-й фактор — № смены,

2-й фактор — квалификация,

3-й фактор — поставщик компонента *REFLUX*.

Или рассмотреть три фактора эксплуатационного шума:

1-й фактор — частота стирки,

2-й фактор — температура эксплуатации,

3-й фактор — влажность среды эксплуатации.

Анализируя результаты ($\bar{y}^n$, s^n), можно выбрать проект изделия или процесса, обеспечивающий необходимое среднее значение $\bar{y}$ с минимальной вариацией s.

В этом смысле говорят об увеличении отношения «сигнал / шум» (S/N). Одна из возможных мер этого отношения:

$$\eta^n = 10\ln(\frac{(\bar{y}^n)^2}{(s^n)^2}) \text{ [дБ]}.$$

Каждое сочетание основных факторов даёт своё значение: $\eta^1, \eta^2, ..., \eta^N$. Т. е. оценивается K-факторная модель, путём дробного факторного эксперимента для определения оптимального сочетания параметров, но в качестве результирующего отклика используется не y^n, а η^n.

В программе *STATISTICA*: *Statistics* → *Industrial statistics and six* σ → *DOE* (*design of experiment*) → *Advanced* → *Taguchi robust design experiments* → *OK* → *design experiment* или *analyze design* → *variables* (*dependent* (*Y*) — указать несколько столбцов, содержащих соответствующие *Y*). Например, *STRENGTH* представлена не одним значением, а четырьмя: y^{n_1}, y^{n_2}, y^{n_3}, y^{n_4}.

В итоге можно найти оценки эффектов уровней *K* факторов в (*S*/*N*) и оптимальное сочетание уровней, ведущее к наилучшему ожидаемому соотношению «сигнал/шум».

Упражнения

Упражнение 4.1

При ортогональной матрице плана были получены значения результирующей величины *y*: 6, 3, 8, 6, 7, 7. Дисперсия ошибок — 9. Найти оценку константы в линейной функции регрессии. Ответ: 6.17.

Упражнение 4.2

При ортогональной матрице плана были получены значения результирующей величины *y*: 6, 3, 8, 6, 7, 7. Дисперсия ошибок — 9. Найти стандартное отклонение оценки константы в линейной функции регрессии. Ответ: 1.22.

Упражнение 4.3

Два двухуровневых фактора. Полный стандартный эксперимент. Наблюдённые результирующие значения: 7.1, 5.3, 4.2, 6.07. Каков эффект нижнего уровня первого фактора? Ответ: –0.0175.

Упражнение 4.4

Две группы кроликов содержались на одинаковых рационах кормления, кроме того, вторая группа получала по 0.06 г хлористого кобальта в день. Прибавки в массе (за 1 неделю) составили:

500	750
600	600

550	700
700	650
650	

Оценить главные эффекты уровней кобальта и найти *sl*. Ответ: –37.5, 37.5, 0.170.

Упражнение 4.5

Эффекты взаимодействия уровней факторов и их оценка в дисперсионном анализе. Рассмотреть пример: 2 сорта на трех участках. Урожайности:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	10, 8	5, 7, 6, 9	4, 2
$i = 2$	7, 9	3, 8, 7	2

Упражнение 4.6

При различных уровнях шумовых факторов получены значения результирующей величины: 7.1, 5.3, 4.2, 6.07. Найти отношение «сигнал/шум» в децибелах. Ответ: 13.3.

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

Упражнение 5.1

Проверка нормальности по критериям Колмогорова и Шапиро — Уилка. Повторить результаты примера 1.1.

Упражнение 5.2

Возможности машины — возможности процесса. Повторить пример 1.2.

Упражнение 5.3

$\bar{X}$ и R — контрольные карты. Повторить примеры 2.2 и 2.3. Для $\bar{X}$-карты найти по графику мощность (т. е. вероятность распознать смещение), если центр процесса сместился в 51.5, а N выбрать = 5. (Ответ: ~ 0.8). Какова при этом вероятность ошибки первого рода? (Ответ: 0.0455).

Statistics, *Industrial Statistics & Six Sigma*, *Quality Control Charts*, *X-bar & R chart for variables*, *X (MA..) specs*, *UCL* и *LCL* — заменить 3 на 2, нажать и *OK* для *Center* и *Sigma*, *R/S spec*, *UCL* и *LCL* — заменить 3 на 2, *Charts*, *X (MA..) &R/S* –видим карты по установочным выборкам. *X (MA..) specs*, *Save specs. Cancel*, *Var* контрольные выборки, *X (MA..) specs*, *Open spec*, *Center*, набрать старое значение, *Charts X (MA..) &R/S* — видим карты в старых границах с новыми точками.

** Выполняются с использованием пакета программ *STATISTICA*.

Упражнение 5.4

P-карта. Повторить пример 2.4.

Упражнение 5.5

С помощью средств *STATISTICA* повторить построение оперативной характеристики и графика среднего выходного уровня качества для плана контроля из упр. 3.4: $M = 100, N = 10, m_0 = 3$. Найти *AOQL*. *Graphs — 2D Graphs — Custom Function Plots*. Использовать встроенную функцию *iBinom* ().

Упражнение 5.6

Решить уравнение: $\Phi^{Bin}_{8,p}(2) = 0.1$. *Statistics* → *Power Analysis* → *Probability Distributions* → *Binomial Distribution*.

Упражнение 5.7

Повторить пример 3.3.

Statistics → *Industrial statistic & six* σ → *Process Analyses* → *Sampling Plans for...* → *binominal proportions* → *one side* (*right*) *test* → *upper confident limit*..., $c_0 = m_0/N$, c_0 – приёмная доля.

Упражнение 5.8

Повторить пример 3.5 с графиком оперативной характеристики. Проверить график, даваемый процедурой из *STATISTICA*, независимым построением (с помощью средств *STATISTICA*) по соответствующей формуле. *Statistics* → *Industrial statistic & six* σ → *Process Analyses* → *Sampling Plans for...* → *normal distribution*... В этой процедуре строится мощность плана (критерия) $w(\alpha, a_0, N, a)$ = вероятность отвергнуть партию = $= 1 - L(a)$.

Упражнение 5.9

Выборочный контроль по количественному признаку, распределённому по нормальному закону. Несоответствие — признак < L. С помощью средств *STATISTICA* построить оперативную характеристику $L(p)$ плана с $N = 10$, $AQL = 10\%$,

$\alpha = 0.2$. Квантиль нормального распределения — функция *vNormal* ().

Упражнение 5.10

Проверить в *STATISTICA* пример 3.12 на нецентральное распределение Стьюдента.

Упражнение 5.11

Робастное проектирование Тагучи. Повторить пример из *STATISTICA: Help* → *Experimental design* → *Examples* → *Example* 7. *Taguchi robust design experiment*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Индивидуальная самостоятельная работа***

Задача 1

Производится аттестация процесса выпуска некоторых изделий. Спецификация изделий задана верхней и нижней границами поля допусков: *USL* и *LSL*, номинал — середина между ними. Считая выборку *A* продолженной выборкой *B*, выборкой из процесса, придумать подходящее наименование изделий (o_1) и контролируемого параметра (o_2), визуальным методом проверить нормальность процесса, оценить индекс возможностей процесса (o_3), меру центрирования (o_4), исправленный индекс возможностей процесса (o_5). Сравнить эти два индекса и подтвердить связь между ними. Определить ожидаемый процент брака (o_6) и подтвердить его ручным расчётом. Сравнить его с рассчитанным на основе индекса возможностей процесса процентом брака (o_7). Высказать мнение о возможности аттестации.

Задача 2

Проверить нормальность объединённой выборки *A*, *B* и *C* по критериям Колмогорова (используя предельное распределение) и Шапиро — Уилка на уровне значимости a. Указать *sl* и «да — нет» гипотезе нормальности (H_0) для обоих критериев.

*** Данные к задачам 1, 2, 9, 10 см. [2, с. 114–118], остальные данные — в таблице после текста задач (с. 76).

Задача 3

Партия из M изделий считается годной, если число дефектных изделий в ней $\leqslant l_0$, и негодной, если это число $\geqslant l_1$. Для плана контроля N и m_0 найти риски поставщика α_{10}и потребителя α_{01}.

Задача 4

Партия из M изделий считается годной, если число дефектных изделий в ней $\leqslant l_0$, и негодной, если это число $\geqslant l_1$. Используя нормальную аппроксимацию распределения числа дефектных изделий в выборке (с дисперсией, рассчитанной по l_0), найти план контроля N и m_0, обеспечивающий риск поставщика α_{10} и потребителя α_{01}.

Задача 5

Коэффициент усиления H транзисторов подчиняется закону нормального распределения со стандартным отклонением σ. Партия транзисторов считается годной, если среднее значение $h \geqslant h_0$, и негодной, если среднее значение $h \leqslant h_1$. Составить план контроля (N, $\bar{x}_0$), обеспечивающий риск поставщика α_{10} и потребителя α_{01}.

Построить график оперативной характеристики найденного плана контроля, указать на нём α_{10} и α_{01}, описать изменение вероятности приёмки партии этим планом при изменении среднего значения коэффициента усиления транзисторов в партии.

На том же чертеже построить графики оперативных характеристик двух планов контроля при других объёмах контрольной выборки (большем и меньшем, чем N) при сохранении α_{10} и h_0, найти по ним риски потребителя, указать приёмные выборочные средние. Для построения трех графиков на одном чертеже: *Graphs* → 2*D Graphs* → *Custom Function Plots*. Правый клик на график, *Graph Properties*, *Custom Function*, *Add new function*. В итоге по горизонтальной оси должно быть указано 4 точки, по вертикальной — 5. Сделать выводы.

Задача 6

Для хорошей партии приводов *CD-ROM* среднее время наработки на отказ должно быть не менее $MTBF_0$ (тыс. ч), для негодной — не более $MTBF_1$ (тыс. ч). При выборке N установлено приёмное число $\bar{x}_0$ (тыс. ч). Каковы риски α_{10} и α_{01}?

Задача 7

Для хорошей партии ламп среднее время наработки на отказ должно быть не менее $MTTF_0$ (ч), для негодной — не более $MTTF_1$ (ч). Пользуясь нормальной аппроксимацией распределения χ^2, составить план контроля, обеспечивающий риски поставщика α_{10} и потребителя α_{01}.

Задача 8

О качестве паркетных дощечек судят по рассеиванию их ширин, которые распределены по нормальному закону со средним 50 мм. Если $\sigma \leqslant \sigma_0$, то партия является годной, если $\sigma \geqslant \sigma_1$, то партия должна быть забракована. Для плана контроля N, $(s_0)_0$ найти риски α_{10} и α_{01}.

Задача 9

Считая, что выборка A — предварительно собранные данные, построить на основе правила «2 сигм» контрольные карты $\bar{X}$ и R. По выборке B нанести на эти карты экспериментальные точки. Находится ли процесс в стабильном состоянии? Число наблюдений в группах принять равным двум для вариантов 1–3, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 19, 21–23, 25 и трём — для остальных вариантов. Последние наблюдения в выборках, не составляющие группы, отбрасываются (если таковые имеются). Какова мощность построенной $\bar{X}$-карты при смещении центра процесса в максимальное значение выборки A?

Задача 10

Параметр качества изделий подчиняется закону нормального распределения. Партия изделий считается годной, если среднее значение параметра $\leqslant a$, и негодной, если среднее значение $\geqslant a + \Delta$. Считать стандартное отклонение равным $\sqrt{s^2}$, где s^2 — несмещённая оценка дисперсии по выборке А,

$$\Delta = \begin{cases} V+1 & V \le 5 \\ V-2 & 5 < V \le 10 \\ V/2 & 10 < V \le 15 \\ V/4 & 15 < V \le 25 \end{cases}$$

где V — номер варианта.

Составить план последовательного контроля, обеспечивающий риск поставщика a, а потребителя — 0.1.

Считая выборку $\{A, B\}$ последовательными наблюдениями, указать номер шага, после которого принимается решение, и это решение.

Вариант	Задача 1		Задача 3					Задача 4					Задача 5				
	USL	LSL	M	l_0	l_1	N	m_0	M	l_0	l_1	α_{10}	α_{01}	σ	h_0	h_1	α_{10}	α_{01}
1	71	30	5	1	3	2	0	500	100	250	0.5	0.1	20	100	80	0.4	0.05
2	63	25	6	1	3	3	0	1000	115	275	0.4	0.05	20	150	140	0.3	0.025
3	149	79	7	2	4	3	1	1500	130	300	0.3	0.025	30	200	180	0.2	0.01
4	–4	–32	8	2	4	3	0	2000	145	325	0.2	0.01	40	250	205	0.1	0.005
5	50	39	9	3	5	2	1	2500	160	350	0.1	0.005	50	300	240	0.05	0.01
6	5	–39	10	3	5	4	1	3000	175	375	0.05	0.01	60	350	290	0.025	0.025
7	20	–26	11	4	6	4	2	3500	190	400	0.025	0.025	70	400	320	0.01	0.5
8	85	45	12	4	6	3	1	4000	205	425	0.01	0.5	80	450	320	0.005	0.4
9	152	93	13	5	7	4	0	4500	220	450	0.005	0.4	90	500	440	0.3	0.3
10	101	31	14	5	7	3	2	5000	235	475	0.5	0.3	100	550	460	0.4	0.2

Вариант	Задача 1		Задача 3					Задача 4					Задача 5				
	USL	*LSL*	*M*	l_0	l_1	*N*	m_0	*M*	l_0	l_1	α_{10}	α_{01}	σ	h_0	h_1	α_{10}	α_{01}
11	170	84	15	2	6	3	0	5500	250	500	0.4	0.2	110	600	500	0.3	0.1
12	161	22	16	3	6	5	1	6000	265	525	0.3	0.1	120	650	500	0.2	0.05
13	249	101	17	3	4	5	2	6500	280	550	0.2	0.05	130	700	600	0.1	0.025
14	145	22	18	4	5	6	2	7000	295	575	0.1	0.025	140	750	600	0.05	0.01
15	108	40	19	4	6	7	3	7500	310	600	0.05	0.01	150	800	360	0.025	0.005
16	114	51	20	5	6	6	2	8000	325	625	0.025	0.005	160	850	680	0.01	0.01
17	224	61	11	1	3	3	1	8500	340	650	0.01	0.01	170	900	720	0.005	0.5
18	74	41	12	1	3	4	0	9000	355	675	0.005	0.5	180	950	820	0.3	0.4
19	248	170	13	2	3	3	0	9500	370	700	0.3	0.4	190	1000	900	0.2	0.3
20	210	100	14	2	5	4	1	7700	385	725	0.2	0.3	200	1050	900	0.1	0.2
21	122	69	15	3	5	4	2	6600	400	750	0.1	0.2	210	1100	900	0.05	0.1

Вариант	Задача 1		Задача 3					Задача 4					Задача 5				
	USL	LSL	M	l_0	l_1	N	m_0	M	l_0	l_1	α_{10}	α_{01}	σ	h_0	h_1	α_{10}	α_{01}
22	135	17	16	3	6	5	1	5500	415	775	0.05	0.1	220	1150	950	0.025	0.05
23	110	83	17	4	6	5	2	4400	430	800	0.025	0.05	230	1200	1000	0.01	0.025
24	87	79	18	4	5	6	1	3300	445	825	0.01	0.025	240	1250	900	0.005	0.01
25	85	40	19	5	7	6	2	2200	460	850	0.005	0.01	250	1300	1200	0.5	0.1

Вари-ант	Задача 6				Задача 7				Задача 8			
	$MTBF_0$	$MTBF_1$	N	$\bar{x}_0$	$MTTF_0$	$MTTF_1$	α_{10}	α_{01}	σ_0	σ_1	N	$(s_0)_0$
1	20	4	6	7	1000	700	0.05	0.001	1	2	5	1.4
2	51	10.5	3	24	1100	750	0.025	0.05	1.1	2.2	6	1.3
3	42	11	4	20	1200	800	0.01	0.05	1.2	2.4	7	1.4
4	23	5	5	10	1300	850	0.005	0.025	1.3	2.6	8	1.7
5	24	5	6	11	1400	900	0.001	0.01	1.4	2.8	9	1.8
6	30	6	7	8	1500	950	0.05	0.005	1.5	3.0	10	1.8
7	35	7	6	11	1600	1000	0.025	0.001	1.6	3.2	11	1.7
8	40	8	8	10	1700	1050	0.01	0.025	1.7	3.4	12	2.0
9	45	9	4	22	1800	1100	0.005	0.01	1.8	3.6	13	2.1
10	50	10	5	20	1900	1150	0.001	0.005	1.9	3.8	14	2.2

Вари-ант	Задача 6				Задача 7				Задача 8			
	$MTBF_0$	$MTBF_1$	N	$\bar{x}_0$	$MTTF_0$	$MTTF_1$	α_{10}	α_{01}	σ_0	σ_1	N	$(s_0)_0$
11	55	11	6	18	2000	1200	0.05	0.001	2.0	4.0	15	2.3
12	60	12	4	30	2100	1250	0.025	0.05	2.1	4.2	16	2.4
13	65	13	6	21	2200	1300	0.01	0.05	2.2	4.4	17	2.5
14	70	12	6	23	2300	1350	0.005	0.025	2.3	4.6	18	2.6
15	75	12	4	37	2400	1400	0.001	0.01	2.4	4.8	19	2.7
16	80	17	5	32	2500	1450	0.05	0.005	2.5	5.0	20	2.8
17	85	18	7	24	2600	1500	0.025	0.001	2.6	5.2	21	2.9
18	90	23	6	30	2700	1550	0.01	0.05	2.7	5.4	22	3.0
19	95	27	4	47	2800	1600	0.005	0.05	2.8	5.6	23	3.1
20	100	18	8	25	2900	1650	0.001	0.025	2.9	5.8	24	3.2
21	105	19	6	35	3000	1700	0.05	0.01	3.0	6.0	25	3.3

Вари-ант	Задача 6				Задача 7				Задача 8			
	$MTBF_0$	$MTBF_1$	N	$\bar{x}_0$	$MTTF_0$	$MTTF_1$	α_{10}	α_{01}	σ_0	σ_1	N	$(s_0)_0$
22	110	21	3	61	3100	1750	0.025	0.005	3.1	6.2	26	3.4
23	115	23	6	38	3200	1800	0.01	0.001	3.2	6.4	27	3.5
24	120	29	7	34	3300	1850	0.005	0.05	3.3	6.6	28	3.6
25	125	29	3	64	3400	1900	0.001	0.025	3.4	6.8	29	4.0

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачёв С. М. Имитационное моделирование в экономике : учебное пособие / С. М. Бородачёв. Екатеринбург : УрФУ, 2010. 77 с.
2. Бородачёв С. М. Методы математической статистики : учебное пособие / С. М. Бородачёв. Екатеринбург : УрФУ, 2012. 127 с.
3. Бородачёв С. М. Многомерные статистические методы : учебное пособие / С. М. Бородачёв. Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2009. 74 с.
4. Бородачёв С. М. Эконометрика : учебное пособие / С. М. Бородачёв. Екатеринбург : УрФУ, 2011. 76 с.
5. Статистические методы в современном менеджменте качества / С. Ф. Жулинский [и др.]. М. : Фонд Новое тысячелетие, 2001.
6. Клячин В. Н. Статистические методы в управлении качеством : компьютерные технологии / В. Н. Клячин. М. : Финансы и статистика, 2007.
7. Контроль качества с помощью персональных компьютеров / под ред. Ю. П. Адлера. М. : Машиностроение, 1991.
8. Статистический контроль качества продукции на основе принципа распределения приоритетов / В. А. Лапидус [и др.]. М. : Финансы и статистика, 1991.

9. Саката С. Практическое руководство по управлению качеством / С. Саката. М. : Машиностроение, 1980.
10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А. А. Свешников. М. : Наука, 1965.
11. Статистические методы повышения качества / под ред. Х. Кумэ. М. : Финансы и статистика, 1990. 304 с.
12. Bergman B., Bengt Klefsjő. Quality. L. : McGraw-Hill, 1994.
13. StatSoft, Inc. (2001) [Электронный ресурс] : электронный учебник по статистике. М.: StatSoft. Режим доступа: http://www. statsoft.ru/home/textbook/default.htm.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Бородачёв Сергей Михайлович

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ

Редактор *В. О. Корионова*
Компьютерный набор *С. М. Бородачёва*
Верстка *Е. В. Ровнушкиной*

Подписано в печать 22.04.2016. Формат 60×84 1/16.
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 5,12.
Уч.-изд. л. 3,3. Тираж 51 экз. Заказ 126.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375–48–25, 375–46–85, 374–19–41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350–56–64, 350–90–13
Факс: 8 (343) 358–93–06
E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2015

9 785799 617189